

Принцип Дирихле.

В несерьёзной форме принцип Дирихле гласит: «Нельзя посадить 7 кроликов в 3 клетки, чтобы в каждой было не больше 2 кроликов.» Более общая формулировка: «Если z зайцев сидят в k клетках, то найдётся клетка, в которой не менее z/k зайцев, а также найдётся клетка, в которой не более z/k зайцев» Не надо бояться дробного числа зайцев: если получается, что в ящике не меньше $7/3$ зайцев, значит, их больше двух.

Доказательство принципа Дирихле очень простое, но заслуживает внимания, поскольку похожие рассуждения «от противного» часто встречаются. Допустим, что в каждой клетке число зайцев меньше, чем z/k . Тогда в k клетках зайцев меньше, чем $k \cdot z/k = z$. Противоречие!

1. Занятия математического кружка проходят в девяти аудиториях. Среди прочих, на эти занятия приходят 19 учеников из одной и той же школы. Докажите, что как их не пересаживай, хотя бы в одной аудитории окажется не меньше трех таких школьников. Верно ли, что в какой-нибудь аудитории обязательно окажется ровно три таких школьника?
2. а) В классе 30 учеников. В диктанте Вова сделал 13 ошибок, остальные меньше. Докажите, что по крайней мере три ученика сделали ошибок поровну.
б) В финальном матче школьного чемпионата по баскетболу команда 5А забила 9 мячей. Докажите, что найдутся два игрока этой команды, забившие поровну мячей. (в команде по баскетболу 5 человек)
в) Можно ли разложить 54 тетради в 10 непустых стопок так, чтобы количество тетрадей в разных стопках было различным?
3. Кот Базилио пообещал Буратино открыть великую тайну, если он составит чудесный квадрат 6×6 из чисел $+1, -1, 0$ так, чтобы все суммы по строкам, по столбцам и по большим диагоналям были различны. Докажите, что Буратино не сможет составить такой квадрат.
4. На карьере добыли 36 камней. Их веса составляют арифметическую прогрессию: 490кг, 495кг, 500кг, ..., 665кг. Можно ли увезти эти камни на семи трёхтонных грузовиках?
5. а) Каждый из 10 участников переговоров послал по их окончании поздравительные открытки пятерым другим участникам. Докажите, что какие-то двое послали открытки друг другу.
б) Докажите, что в любой компании есть по крайней мере два человека, имеющие одинаковое число друзей в этой компании.
6. а) Среди любых шести целых чисел найдутся два числа, разность которых кратна 5. Докажите это.
б) Даны 12 различных двузначных чисел. Докажите, что из них можно выбрать два числа, разность которых — двузначное число, записываемое двумя одинаковыми цифрами.
7. а) Существуют ли пятьдесят различных двузначных чисел, сумма никаких двух из которых не равна 100?
б) А более пятидесяти?
8. В квадратном ковре со стороной 1 метр моль проела 24 дырки. Докажите, что из этого ковра всегда можно вырезать квадратный коврик со стороной 20 сантиметров, в котором дырок не будет.

Домашнее задание.

1. Пятеро молодых рабочих получили на всех зарплату - 1500 рублей. Каждый из них хочет купить себе магнитофон ценой 320 рублей. Докажите, что кому-то из них придется подождать с покупкой до следующей зарплаты.
2. 10 школьников на олимпиаде решили 35 задач, причем известно, что среди них есть школьники, решившие ровно одну задачу, школьники, решившие ровно две задачи и школьники, решившие ровно три задачи. Докажите, что есть школьник, решивший не менее пяти задач.