

Инвариант.

Определение. Инвариант – это что-то (число, свойство), что не изменяется при разрешенных действиях. Типичные инварианты: четность, остаток при делении на какое-то число, произведение или сумма всех чисел или остатков и т.п.

1. а) На листке написаны целые числа от 1 до 10. Можно стереть любые два числа a и b и записать число $a+b$. В конце осталось одно число. Какое?
б) Тот же вопрос, если вместо a и b можно записать ab .

2. Можно ли монетами в 14 и 35 шиллингов заплатить без сдачи сумму в 2017 шиллингов?

3. Можно ли операциями “прибавить 4” и “умножить на 5”, получить из числа 3 число 2017.

4. В марсианском алфавите есть две буквы - У и Ы, причем если из любого слова выкинуть стоящие рядом буквы УЫ, то смысл слова не изменится. Точно также смысл не изменится при добавлении в любое место слова буквосочетания ЫУ или УУЫЫ. Верно ли, что слова ЫУЫУЫ и УЫУЫУ имеют одинаковый смысл?

5. На доске можно выделить любой прямоугольник, где есть клетки двух цветов, и перекрасить все клетки в нём в противоположный цвет. Можно ли такими операциями доску, покрашенную в шахматном порядке, сделать полностью белой?

6. По кругу расположены 30 монет, чередуясь: три подряд орлом, три решкой, три орлом, три решкой и т.д. Если у монеты два соседа лежат по-разному, ее можно перевернуть. Какое наибольшее число монет можно положить орлом с помощью таких операций?

7. Есть три кучки камней: 51 камень – в первой, 49 – во второй, 5 – в третьей. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку, состоящую из четного количества камней, на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?

Домашнее задание:

1. Изначально на доске написаны числа 4, 5, 6. Разрешается взять любые два из написанных чисел a и b , стереть их. А на их месте написать числа

а) $\frac{5a-3b}{2}$ и $\frac{5b-3a}{2}$

б) $\frac{a^2}{b}$ и $\frac{b^2}{a}$;

Можно ли такими операциями получить числа 7, 8, 9?

2. На доске выписаны числа $1, 1/2, \dots, 1/n$. Разрешается стереть любые два числа a и b и заменить их на число $ab+a+b$. Какое число останется после $n-1$ таких операций?