

## Делимость-2. Остатки.

**Определение.** Число  $r$  называется остатком  $a$  при делении на  $b$ , если  $a=bq+r$ , где  $a, b, q, r$  — целые и  $0 \leq r < b$ .

**Действия с остатками** Пусть число  $a_1$  дает при делении на  $b$  остаток  $r_1$ , число  $a_2$  — остаток  $r_2$ . Тогда

а) (сложение остатков) Число  $a_1+a_2$  при делении на  $b$  дает тот же остаток, что и число  $r_1+r_2$ .

б) (вычитание остатков) Число  $a_1-a_2$  при делении на  $b$  дает тот же остаток, что и число  $r_1-r_2$ .

в) (умножение остатков) Число  $a_1a_2$  при делении на  $b$  дает тот же остаток, что и число  $r_1r_2$ .

1. Найдите остаток при делении на 7 а)  $6789^{34}$  б)  $143^{45}$
2. Какие остатки при делении на 4 может давать квадрат целого числа?
3. Докажите, что нельзя составить квадрат натурального числа, используя только цифры 2, 3, 7 и 8.
4. а) Какие остатки может давать куб целого числа на а) 7; б) 9?  
б) Докажите, что число 108 нельзя представить в виде суммы двух точных кубов.  
в)  $(a^3+b^3+c^3)$  делится на 63. Докажите, что  $abc$  делится на 21.
5. а) Назовем натуральное  $n$  удобным, если  $n^2+1$  делится на 2501. Докажите, что среди  $1, \dots, 2500$  четное количество удобных чисел.  
б) Докажите, что среди 51 целого числа найдутся два, квадраты которых дают одинаковые остатки при делении на 100
6. а) Может ли число  $a^2+b^2+c^2$  делиться на 5, если ни одно из чисел  $a, b, c$  не делится на 5?  
б) Докажите, что для любого целого числа  $A$  по крайней мере одно из чисел  $A^3+A$  и  $A^3-A$  делится на 10.
7. Пусть  $P_n = p_1 p_2 \dots p_n$  — произведение первых  $n$  простых чисел ( $n > 1$ ). Докажите, что а)  $P_n - 1$  б)  $P_n + 1$  не является полным квадратом.
8. Шайка разбойников отобрала у купца мешок с монетами. Каждая монета стоит целое число грошей. Оказалось, что какую монету не отложи, оставшиеся монеты можно поделить между разбойниками так, что каждый получит одинаковую сумму. Докажите, что число монет без одной делится на число разбойников в шайке.

### Домашнее задание.

1. Найдите последнюю цифру а)  $1763^{345}$  б)  $3567^{245}$
2. Докажите, что  $n(n-1)(n+1)$  делится на 6 для любого натурального  $n$ .