

Делимость-1.

Определение 1. Натуральное число больше 1 называется простым, если оно делится нацело только на единицу и само себя

Определение 2. Натуральное число называется составным, если оно делится нацело не только на единицу и само себя.

Определение 3. Числа называются взаимно простыми, если их наибольший общий делитель равен 1.

Основная теорема арифметики. Любое число больше 1 может быть разложено в произведение одного или больше простых множителей, причем это разложение единственно.

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

1. Докажите, что если ab делится на простое число p , то одно из чисел a и b делится на p .
2. Про a, b известно, что ни одно из них не кончается на ноль, а произведение 10000. Какие значения может принимать их сумма?
3. Существуют ли 3 натуральных числа таких, что ни одно из них не делится на другое, а произведение любых двух из них делится на третье?
4. Докажите, что у составного числа a найдется такой простой делитель p , что $p^2 \leq a$.
5. На доске записаны двузначные числа. Каждое число составное, но любые два числа взаимно просты. Какое наибольшее количество чисел может быть записано?
6. По кругу расставили 2017 чисел. Может ли быть так, что отношение любых двух последовательных чисел - простое число?
7. Натуральное число назовём удивительным, если самый большой его собственный делитель (т.е. делитель, не равный 1 и самому числу) на 1 больше самого маленького собственного делителя. Найдите все удивительные числа.
8. Опишите все натуральные числа, у которых нечётное количество делителей.

Домашнее задание.

1. Существует ли n такое, что $n!$, что нулей на конце ровно 5?
2. Если в выражение $n^2 - n + 41$ подставлять числа $n=1, 2, 3, 4, 5$, то получатся простые числа 41, 43, 47, 53, 61. Верно ли, что при любом n получится простое число?