Кружок 1568. 7 класс.
44 занятие.

Зацикливание 2.

1. a) Каждое следующее число в последовательности целых чисел получается из предыдущего так: число возводится в квадрат, и из него вычеркиваются все цифры, кроме последних четырех. Докажите, что последовательность периодическая, и длина периода не больше 10000 чисел.
   b) А можно ли утверждать что длина периода не больше 5000 чисел?
   c) А можно ли утверждать что длина периода не больше 2500 чисел?
   d) А можно ли утверждать что длина периода не больше 1000 чисел?
2. Следующий член последовательности натуральных чисел равен последней цифре произведения двух предыдущих.
   Докажите что последовательность
   a) периодична;
   b) с периодом длины не больше 26;
   c) меньше 17.
3. Натуральное число заменяют суммой квадратов его цифр. Докажите, что для любого натурального числа после некоторого количества таких операций процесс зациклится
4. В тридесятом царстве ни одна из дорог не заканчивается тупиком. Рыцарь, Любящий Постоянство, выезжает из своего замка и, доезжая до любого перекрестка, едет по самой левой дороге. Докажите, что в конце концов он попадет таким образом обратно в свой замок.
5. По кругу стоит несколько коробочек. Каждая из них может быть пустой или содержать один или несколько шариков. Сначала из какой-то коробочки берутся все шарики и раскладываются по одному по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки. На следующем ходу раскладывают шарики из той коробочки, в которую попал последний шарик на предыдущем ходу, и т.д. Докажите, что в какой-то момент повторится начальное расположение шариков.
6. На бесконечной в обе стороны ленте записан текст на русском языке. Известно, что в этом тексте число различных кусков из 15 символов равно числу различных кусков из 16 символов. Докажите, что на ленте записан "периодический"текст, например: ...мамамылярамумамамыла- раму...
7. На проволоку, имеющую форму окружности, насажено несколько стальных шариков одинакового размера. В некоторый момент шарики начинают двигаться с одинаковыми скоростями, но некоторые – по часовой стрелке, а некоторые – против. Сталкиваясь, шарики разлетаются с теми же скоростями в противоположные стороны. Докажите, что через некоторое время расположение шариков на окружности совпадет с исходным, если:
   а) шарики неразличимы; б) все шарики различны