

Графы: степени вершин.

1. В государстве 50 городов. Из каждого города выходит 7 дорог. Сколько всего дорог в этом государстве?

Теорема. Число ребер в графе равно половине от суммы степеней вершин.

2. В графе из каждой вершины выходит по три ребра. Может ли в нём быть 2017 рёбер?

3. В компании 15 человек. Каждый сделал по 5 рукопожатий. Сколько всего было рукопожатий?

4. На математический кружок пришло 23 ученика. Может ли случиться так, что каждая девочка дружит ровно с тремя из присутствующих на занятии кружковцами, а каждый мальчик – ровно с пятью?

Лемма о рукопожатиях. В любом графе число нечётных вершин чётно.

5. На международном форуме собралось 16 делегатов. Все делегаты знают ровно один язык. При этом оказалось, что каждый делегат пообщался с 8 другими. Докажите, что все делегаты общаются на одном языке.

6. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

7. В стране из каждого города, кроме Столицы и город Дальний, выходит ровно четыре дороги. Из Столицы выходит 11 дорог, а из Дальнего одна. Докажите, что по дорогам можно добраться из Столицы в Дальний.

8. Витя Перестукин заметил, что между каждыми двумя городами страны невыученных уроков установлено воздушное сообщение одной из двух авиакомпаний – Lessons Airlines или Lazy Wings. Докажите, из этих двух авиакомпаний хотя бы одна такова, что что из любого города можно попасть в любой другой рейсами только этой авиакомпании.