Угол между касательной и хордой

8 класс

25.04.18

Теорема. Угол между хордой и касательной к окружности равен половине дуги внутри этого угла.

0. Пусть вершина угла BAC расположена вне окружности, его сторона AB пересекают эту окружность, а сторона AC касается окружности. Тогда угол BAC равен полуразности дуг окружности, заключённых внутри этого угла.

1. Внутри данной окружности находится другая окружность; ABC и ADE — хорды большей окружности, касающиеся меньшей окружности в точках B и D; BMD — меньшая из двух дуг между точками касания; CNE — дуга между концами хорд. Найдите угловую величину дуги CNE, если дуга BMD содержит $130°$.

2. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Прямая, проходящая через точку A пересекает окружность ω_1 в точке C, а окружность ω_2 — в точке D. Точка E такая, что EC и ED касательные к ω_1 и ω_2 соответственно. Докажите, что четырехугольник $BCDE$ вписанный.

3. Касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC пересекает прямую BC в точке E; AD — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $AE = ED$.

4. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника AB_1C_1 принадлежит первой окружности.

5. Биссектрисы углов A и C остроугольного неравнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке I и пересекают высоту из вершины B в точках P и Q. Докажите, что прямая BI касается описанной окружности треугольника IPQ.

6. Точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC. Касательные к описанным окружностям треугольников AHB и AHC, восстановленные в точке H, пересекают прямую BC в точках X и Y соответственно. Докажите, что $XH = YH$.

7. Вписанная в треугольник ABC окружность ω касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. На продолжении отрезка AA_1 за точку A взята точка D такая что $AD = AC_1$. Прямые DB_1 и DC_1 пересекают второй раз окружность ω в точках B_2 и C_2. Докажите, что B_2C_2 — диаметр окружности ω.

8. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Окружность Ω, описанная около треугольника ABC, пересекает прямую A_1C_1 в точках A' и C'. Касательные к Ω, проведённые в точках A' и C', пересекаются в точке B'. Докажите, что прямая BB' проходит через центр окружности Ω.

9. Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC$; O, I — центры его описанной и вписанной окружностей соответственно. Окружность ω описана вокруг треугольника AIO и пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке D. Докажите, что BD — касательная к ω.

10. Окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним образом в точке O. Точки A и B на окружности ω_1 и точки C и D на окружности ω_2 таковы, что AC и BD — общие внешние касательные к окружностям. Прямая AO пересекает отрезок CD в точке M, а прямая CO пересекает вторично окружность ω_1 в точке N. Докажите, что точки B, M и N лежат на одной прямой.