Вписанные четырёхугольники

8 класс

11.04.18

1. Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ с боковой стороной AB пересекается в точке P. Докажите, что центр O ее описанной окружности лежит на описанной окружности треугольника APB.

2. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, K — середина дуги AB, не содержащей точек C и D. Пусть P и Q — точки пересечения пар хорд CK и AB, DK и AB соответственно. Докажите, что четырёхугольник $CPQD$ — вписанный.

3. На продолжении стороны BC треугольника ABC за вершину B отложен отрезок BB', равный стороне AB. Биссектрисы внешних углов при вершинах B и C пересекаются в точке M. Докажите, что точки A, B', C и M лежат на одной окружности.

4. Треугольник ABC вписан в окружность. Точка D — середина дуги AC, точки K и L выбраны на сторонах AB и CB соответственно так, что KL параллельна AC. Пусть K' и L' — точки пересечения прямых DK и DL соответственно с окружностью. Докажите, что вокруг четырехугольника $KLL'K'$ можно описать окружность.

5. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, вписанный в окружность с центром в точке O. Окружности, описанные вокруг треугольников ABO и CDO, пересеклись второй раз в точке F. Докажите, что точки A, F, D и точка E пересечения отрезков AC и BD лежат на одной окружности.

6. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором угол ABC тупой. Прямая AD пересекает второй раз окружность ω, описанную вокруг треугольника ABC, в точке E. Прямая CD пересекает второй раз окружность ω в точке F. Докажите, что центр описанной окружности треугольника DEF лежит на окружности ω.

7. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке N. Описанные окружности треугольников ANB и CND, повторно пересекают стороны BC и AD в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Докажите, что четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ вписан в окружность с центром в точке N.

8. Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны. Пусть P — точка пересечения диагоналей. Докажите, что середины сторон четырехугольника $ABCD$ и проекции точки P на стороны лежат на одной окружности.