Угол между секущими к окружности

8 класс

4.04.18

0. **(a)** Пусть вершина угла BAC расположена внутри окружности. Тогда угол BAC равен полусумме дуг окружности, заключённых внутри угла BAC и угла, симметричного ему относительно вершины A.
(b) Пусть вершина угла BAC расположена вне окружности, а его стороны пересекают эту окружность. Тогда угол BAC равен полуразности дуг окружности, заключённых внутри этого угла.

1. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Точки K, L, M, N являются соответственно серединами дуг AB, BC, CD, DA. Докажите, что прямые KM и LN перпендикулярны.

2. Докажите, что прямая, соединяющая середины дуг AB и AC, где A, B, и C — три точки одной окружности, отсекает на хордах AB и AC равные отрезки, считая от точки A.

3. Внутри остроугольного треугольника ABC нашлась такая точка P, что $\angle BPC = \angle BAC + 60°$, $\angle CPA = \angle CBA + 60°$, $\angle APB = \angle ACB + 60°$. Лучи AP, BP, CP продлили до пересечения с описанной окружностью треугольника ABC. Докажите, что полученные точки пересечения лежат в вершинах равностороннего треугольника.

4. Две равные окружности пересекаются в точках A и B. Пусть P — отличная от A и B точка одной из окружностей, лежащая внутри другой окружности, X, Y — вторые точки пересечения прямых PA, PB с другой окружностью. Докажите, что прямая, проходящая через P и перпендикулярная AB, делит одну из дуг XY пополам.

5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O. Точки E и F — середины не содержащих других вершин дуг AB и CD соответственно. Прямые, проходящие через точки E и F параллельно диагоналям четырёхугольника $ABCD$, пересекаются в точках K и L. Докажите, что прямая KL проходит через точку O.

6. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, а лучи CB и DA — в точке Q. Докажите, что
(a) биссектрисы углов BPC и BQA перпендикулярны.
(b) точки пересечения биссектрис углов BPC и BQA со сторонами четырёхугольника являются вершинами ромба.