«Плохая» индукция

8 класс

28.02.18

1. **«Утверждение».** При любом натуральном n числа n и $n+1$ равны.
«Доказательство». Предположим, что утверждение верно для $n = k$, то есть $k = k+1$. Прибавляя к обеим частям этого равенства единицу, получаем, что $k+1 = k+2$. Рассуждая так дальше, получаем, что все числа равны. $\square$

2. **«Утверждение».** В любом графе с $n \geqslant 3$ вершинами и n рёбрами обязательно есть три вершины, попарно соединённые рёбрами.
«Доказательство». При $n = 3$ утверждение очевидно. Предположим, что в графе с $k \geqslant 3$ вершинами и k рёбрами обязательно есть три вершины, попарно соединённые рёбрами. Добавим ещё одну вершину и соединим ребром две несоединёные ранее вершины. Получим граф с $k+1$ вершинами и $k+1$ рёбрами и в нём есть три вершины попарно соединённые рёбрами. $\square$

3. **«Утверждение».** При разбиении прямоугольника на $n \geqslant 2$ прямоугольников всегда найдутся два, у которых совпадают две вершины.
«Доказательство». При $n = 2$ утверждение верно. Предположим, что при разбиении прямоугольника на $k \geqslant 2$ прямоугольников всегда найдутся два, у которых совпадают две вершины. Разделим какой-нибудь прямоугольник на два прямоугольника. Тогда эти у этих двух прямоугольников совпадают две вершины. Итак, мы получили, что данный прямоугольник разбит на $k+1$ прямоугольников среди которых есть два, у которых совпадают две вершины. $\square$

4. **«Утверждение».** Любые n чисел равны.
«Доказательство». Если $n = 1$, то доказывать нечего: число только одно и оно равно самому себе. Предположим, что любые k чисел равны и докажем, что любые $k+1$ чисел равны. Рассмотрим произвольные $k+1$ числел a_1, a_2, …, a_k, a_{k+1}. Отбросив последнее число, получим набор из k чисел. По предположению индукции они равны: $a_1 = a_2 = \ldots = a_k$. Теперь отбросим первое число. Снова получим набор из k чисел, и предположение индукции даёт $a_2 = \ldots = a_k = a_{k+1}$. Объединяя эти два равенства, получаем, что $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = a_{k+1}$, что и требовалось доказать. $\square$

5. **«Утверждение».** Любые n точек лежат на одной прямой.
«Доказательство». При $n = 1$ это ясно. Предположим, что любые k точек лежат на одной прямой и докажем, что любые $k+1$ точек лежат на одной прямой. Рассмотрим произвольные $k+1$ точек A_1, A_2, …, A_k, A_{k+1}. Отбросим последнюю точку и применим предположение индукции. Получим прямую l, на которой лежат точки A_1, A_2, …, A_k. Нам надо доказать, что и последняя точка A_{k+1} лежит на этой прямой. Отбросим первую точку и применим предположение индукции к точкам A_2, A_3, …, A_{k+1}. Получим, что они все лежат на некоторой прямой l'. Но прямые l и l' совпадааают, так как обе они проходят через точки A_2 и A_k, а как известно, через две точки можно провести только одну прямую. Поэтому все $k+1$ точек лежат на одной прямой. $\square$

6. **«Утверждение».** Если $\max(a, b) = n$, где a и b натуральные, то $a = b$.
«Доказательство». При $n = 1$: если $\max(a, b) = 1$, то $a = b = 1$. Предположим, что если $\max(a, b) = k$, то $a = b$. Пусть теперь $\max(a, b) = k+1$. Тогда $\max(a-1, b-1) = k$, значит, $a - 1 = b - 1$. Следовательно, $a = b$, что и требовалось доказать. $\square$