

Средняя линия треугольника

8 класс

29.11.17

Определение. Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется *средней линией треугольника*.

Теорема. Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне треугольника, а длина средней линии треугольника равна половине этой стороны.

1. Теорема Вариньона.

(а) Докажите, что середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма. (Рассмотрите случай выпуклого и невыпуклого четырёхугольника.)

(б) Докажите, что середины двух противоположных сторон и середины диагоналей любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма. (Рассмотрите случай выпуклого и невыпуклого четырёхугольника.)

2. **Теорема Гаусса.** Докажите, что отрезки соединяющие середины противоположных сторон и отрезок, соединяющий середины его диагоналей, пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

3. На сторонах AB , BC и AD параллелограмма $ABCD$ отмечены середины K , L и M соответственно.

(а) Докажите, что прямые BM и DL делят диагональ AC на три равные части.

(б) Докажите, что прямые DK и DL делят диагональ AC на три равные части.

4. На стороне AC треугольника ABC взята точка D так, что $AD : DC = 1 : 2$. Докажите что у треугольников ADB и CDB есть по равной медиане.

5. В треугольнике ABC высота AH проходит через середину медианы BM . Докажите, что в треугольнике BMC также одна из высот проходит через середину одной из медиан.

6. Высота BH остроугольного треугольника ABC равна его медиане AM . Найдите угол CAM .

7. Треугольник ABC равнобедренный ($AB = BC$). Точка M — середина стороны AB , точка P — середина отрезка CM , точка N делит сторону BC в отношении $3 : 1$ (считая от вершины B). Докажите, что $AP = MN$.

8. На стороне AB треугольника ABC взята такая точка P , что $AP = 2PB$, а на стороне AC — ее середина, точка Q . Известно, что $CP = 2PQ$. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

9. В четырёхугольнике $ABCD$ точка E — середина AB , F — середина CD . Докажите, что середины отрезков AF , CE , BF и DE являются вершинами параллелограмма.

10. В четырёхугольнике $ABCD$ $\angle A = \angle B = \angle D = 45^\circ$. Докажите, что середины его сторон являются вершинами квадрата.