
(mod 8)

8 класс

27.09.17

1. Докажите, что $n^3 - n$ делится на 24 при любом нечётном n .
2. Докажите, что сумма квадратов трёх натуральных чисел, уменьшенная на 7, не делится на 8.
3. (а) Может ли сумма квадратов двух нечётных чисел быть квадратом целого числа?
(б) Может ли сумма квадратов трёх нечётных чисел быть квадратом целого числа?
4. (а) Докажите, что $p^2 - 1$ делится на 24, если p — простое число и $p > 3$.
(б) Докажите, что $p^2 - q^2$ делится на 24, если p и q — простые числа, большие 3.
5. Пусть P_n — произведение первых n простых чисел. Докажите, что ни одно из чисел
(а) $P_n + 1$;
(б) $P_n - 1$
не является полным квадратом.
6. Пусть $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что xy делится на 12, а xyz делится на 60.
7. Пусть $p > 5$ — простое число. Докажите, что $(p^2 - 1)(p^2 + 11)$ делится на 1440.
8. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы трёх квадратов.
9. Будем называть число почти квадратом, если оно либо точный квадрат, либо точный квадрат, умноженный на простое число. Может ли 8 почти квадратов идти подряд?