

Хороводы

6–8 класс

23.05.18

0. **Лемма о хороводах.** Докажите, что если несколько человек возьмутся за руки, причём у каждого будут заняты обе руки, то они образуют один или несколько хороводов. А если у нескольких людей будут свободные руки?
1. У каждого из 30 шестиклассников не более двух близких друзей. Оказавшись в одной аудитории, два близких друга начинают непрерывно болтать, и всякая работа в этой аудитории прекращается. Какое наименьшее число аудиторий необходимо иметь, чтобы обеспечить бесперебойную работу кружка?
2. На математической олимпиаде было предложено 20 задач. На закрытие пришло 20 школьников. Каждый из них решил по две задачи, причём выяснилось, что среди пришедших каждую задачу решило ровно два школьника. Докажите, что можно так организовать разбор задач, чтобы каждый школьник рассказал одну из решенных им задач, и все задачи были разобраны.
3. У каждого шестиклассника есть ровно один друг и ровно один враг. Докажите, что их можно разбить на две учебные группы так, чтобы в каждой группе не было ни друзей, ни врагов.
4. В классе 30 учеников, у каждого ровно по 2 друга. Докажите, что можно организовать не менее 10 дежурств так, чтобы дежурили по двое друзей, и никто не дежурил дважды. Всегда ли можно организовать 11 дежурств?
5. На 20 карточках с двух сторон написаны числа от 1 до 20 по два раза каждое.
(а) Докажите, что карточки можно положить на стол так, чтобы сверху каждое из чисел было написано ровно один раз.
(б) Докажите, что количество способов это сделать — степень двойки.
6. После нескольких игровых дней однокругового футбольного чемпионата выяснилось, что любые пять команд можно так расположить по кругу, чтобы каждая команда сыграла со стоящими справа и слева. Докажите, что чемпионат можно завершить в три дня. (В один день команда может сыграть не более одной игры.)
7. На клетчатой доске 11×11 отмечено 22 клетки так, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали отмечено ровно 2 клетки. Два расположения отмеченных клеток эквивалентны, если, меняя любое число раз вертикали между собой и горизонтали между собой, мы из одного расположения можем получить другое. Сколько существует неэквивалентных расположений отмеченных клеток?
8. В стране 100 дорог. Каждая дорога соединяет ровно два города (на всех дорогах двустороннее движение). Из любых трёх дорог можно выбрать две, которые не выходят из одного города. Докажите, что найдутся 40 дорог, никакие 2 из которых не выходят из одного города.
9. В одной большой клетке сидели 48 попугаев. Однажды они передрались, в результате каждый из них выдрал у кого-то другого перо и у всех попугаев оказались поврежденными хвосты. При этом для любых трёх попугаев можно указать четвертого, который травмировал одного из них. Хозяин решил пересадить их в три клетки, которые вмещают 20, 20 и 8 попугаев. Докажите, что он может рассадить попугаев так, чтобы ни один попугай не сидел в одной клетке со своим обидчиком.