

Необычные признаки равноостаточности

7–8 класс

8.05.18

0. Докажите следующие признаки равноостаточности:
- (а) $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} \equiv \overline{a_1 a_0} + \overline{a_3 a_2} + \overline{a_5 a_4} + \dots \pmod{99}$.
 Выведите отсюда новые признаки равноостаточности на 3, 9 и 11.
- (б) $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} \equiv \overline{a_2 a_1 a_0} + \overline{a_5 a_4 a_3} + \dots \pmod{999}$.
 Выведите отсюда признаки равноостаточности на 3, 9, **27**, **37**, 111.
- (с) $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} \equiv \overline{a_2 a_1 a_0} - \overline{a_5 a_4 a_3} + \overline{a_8 a_7 a_6} - \overline{a_{11} a_{10} a_9} + \dots \pmod{1001}$.
 Выведите отсюда признаки равноостаточности на **7**, **11**, **13**.
- (д) $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} \equiv \overline{a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0} + \overline{a_{11} a_{10} a_9 a_8 a_7 a_6} + \dots \pmod{999\,999}$.
 Выведите отсюда признаки равноостаточности на 3, 9, 27, 37, 111; 7, 11, 13.
 Так можно продолжать придумывать признаки равноостаточности на 41, 73, 137, 271, но они вряд ли когда-нибудь пригодятся.
- Вася выписал на доску в некотором порядке все двузначные числа (каждое ровно по одному разу). Получилось «большое» число. Какой остаток оно может давать при делении на 11?
 - Делится ли на 3 (на 9) число $1234\dots 500$? (В записи этого числа подряд выписаны числа от 1 до 500.)
 - Докажите, что число $192021\dots 7980$ делится на 1980.
 - У числа 2^{2018} зачеркнули его первую цифру и прибавили её к оставшемуся числу. С результатом проделали ту же операцию и т. д., до тех пор пока не получили 10-значное число. Доказать, что в этом числе есть две одинаковые цифры.
 - Найдите наименьшее натуральное число, кратное 99, в десятичной записи которого участвуют только чётные цифры.
 - Назовем десятизначное число интересным, если оно делится на 11 111 и все его цифры различны. Сколько существует интересных чисел?
 - 2019 цифр выписаны по кругу. Известно, что если читать эти цифры по часовой стрелке, начиная с некоторого определённого места, то полученное 2019-значное число делится на 27. Докажите, что если начать читать по часовой стрелке с любого другого места, то полученное число также будет делиться на 27.
 - Докажите, что если натуральное число делится на 999, то его сумма цифр не меньше 27.