Признаки равноостаточности

7–8 класс

4.05.18

Признаки равноостаточности.
(a) $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} \equiv a_0 \pmod{2, 5, 10}$;
(b) $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} \equiv \overline{a_1 a_0} \pmod{4, 25, 100}$;
(c) $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} \equiv \overline{a_{k-1} \ldots a_1 a_0} \pmod{2^k, 5^k, 10^k}$;
(d) $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} \equiv a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \pmod{3, 9}$;
(e) $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} \equiv a_0 - a_1 + a_2 - \ldots \pmod{11}$.

0. Докажите признаки равноостаточности.

1. Имеет ли решение ребус АПЕЛЬСИН − СПАНИЕЛЬ $= 2017 \cdot 2018$?

2. **(a)** Докажите, что разность числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 9.
(b) Докажите, что сумма числа, имеющего чётное количество цифр, и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 11.
(c) Докажите, что разность числа, имеющего нечётное количество цифр, и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 99.

3. Числа n и $8n$ отличаются только порядком цифр. Докажите, что n делится на 9.

4. Какую минимальную сумму цифр может иметь натуральное число, делящееся на 99?

5. Взяли число 2^{2018}. Затем посчитали сумму его цифр, затем сумму цифр суммы цифр и так далее, пока не получили какую-ту цифру. Какую?

6. Существует ли натуральное число, которое при делении на сумму своих цифр как в частном, так и в остатке дает число 2017?

7. Дано 100 целых чисел. Из первого числа вычли сумму цифр второго числа, из второго вычли сумму цифр третьего числа, и так далее, наконец, из 100-го числа вычли сумму цифр первого числа. Могут ли эти разности оказаться соответственно равными 1, 2, . . . , 100 в каком-то порядке?

8. В клетки таблицы 100×100 записаны ненулевые цифры. Оказалось, что все 100 стозначных чисел, записанных по горизонтали, делятся на **(a)** 3, **(b)** 11. Могло ли так оказаться, что ровно одно стозначное число из записанных по вертикали не делится на **(c)** 3, **(d)** 11?

9. Дано 2002-значное число, состоящее только из равного количества 1 и 2. За одну операцию можно поменять местами некоторые две цифры. За какое наименьшее количество операций можно гарантировано получить число кратное 11?

10. На доске написана единица. Если на доске написано число n, то разрешается стереть n и записать одно из чисел $n^2 - 5$ или $n^2 + 5$. Проделав несколько таких замен, Вася получил число, состоящее только из цифр 6, причём их было больше одной. Докажите, что Вася ошибся.

11. Два игрока по очереди выписывают на доске в ряд слева направо произвольные цифры. Проигрывает игрок, после хода которого одна или несколько цифр, записанных подряд, образуют число, кратное 11. Кто из игроков победит при правильной игре?