

Двудольные графы

7–8 класс

27.04.18

Определение Граф называется *двудольным*, если его вершины можно покрасить в чёрный и белый цвет так, что никакие вершины одного цвета не будут связаны ребром.

Критерий двудольности (из прошлого листочка по графам). Граф является двудольным тогда и только тогда, когда в графе все циклы имеют чётную длину.

1. Каждый из десяти гвардейцев кардинала Ришелье хоть раз вызывал на дуэль кого-нибудь из мушкетеров. Причем первый гвардеец бросал вызов на дуэль ровно один раз, второй гвардеец — ровно два раза, ..., десятый — ровно десять раз. Сколько могло быть мушкетеров, если известно, что каждый из них получал вызов на дуэль ровно пять раз?
2. В классе 27 человек. Каждая девочка дружит с 5 мальчиками, а каждый мальчик с 4 девочками. Сколько мальчиков в классе?
3. В классе каждый мальчик дружит ровно с двумя девочками, а каждая девочка — ровно с тремя мальчиками. Еще известно, что в классе 31 пионер и 19 парт. Сколько человек в этом классе?
4. Для игры в классики на земле нарисован ряд клеток, в которые вписаны по порядку числа от 1 до 10, как на рисунке:

1	4	5	8	9
2	3	6	7	10

Женя прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок — на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Женя была один раз, на клетке 2 — два раза, ..., на клетке 9 — девять раз. Сколько раз побывала Женя на клетке 10?

5. Дано 1000 натуральных чисел. Докажите, что их можно покрасить в два цвета так, что отношение любых двух одноцветных чисел не является простым числом.
6. В посёлке живёт 1000 мальчиков и 1000 девочек, некоторые из которых дружат друг с другом. Одним заклинанием местная колдунья может посорить каких-нибудь мальчика и девочку или, наоборот, подружить. За какое наименьшее количество заклинаний она гарантированно сможет добиться того, чтобы каждый мальчик дружил с нечётным количеством девочек, а каждая девочка дружила с нечётным количеством мальчиков?
7. Можно ли расставить 777 шахматных коней на доске 2017×2017 так, чтобы каждый из них бил ровно 4 других?
8. 8 школьников решало 8 задач. Известно, что каждую задачу решило 5 человек. Докажите, что найдутся такие 2 ученика, что каждую задачу реешил хотя бы один из них.