

Подвешивание графа

7–8 класс

30.03.18

1. В стране некоторые города соединены авиалиниями, причём из города A в город B нельзя попасть, сделав менее десяти пересадок. Докажите, что все авиалинии можно распродать 11 авиакомпаниям таким образом, что любой маршрут из A в B будет проходить по линиям, принадлежащим всем 11 компаниям.
2. В графе степень каждой вершины равна трём и между любыми двумя вершинами существует путь длиной не более 2. Какое максимальное количество вершин может быть в этом графе?
3. Докажите, что вершины графа можно покрасить в чёрный и белый цвет так, что никакие вершины одного цвета не будут связаны ребром, тогда и только тогда, когда в графе нет нечётных циклов.
4. В цветочном городе живёт некоторое число коротышек. В первый день один из них заболел. Если коротышка болеет, то к нему приходят все его здоровые друзья и заражаются (то есть становятся больными в следующий день). Если коротышка один день болел, то он выздоравливает на следующий день, и более того, получает иммунитет на этот день. Коротышка с иммунитетом может навещать друзей без риска заражения. Может ли так случиться, что эпидемия будет продолжаться бесконечно долго?
5. В стране 125 городов, некоторые из которых соединены друг с другом дорогами. Из каждого города выходит хотя бы 5 дорог. Докажите, что существует несамопересекающийся циклический маршрут, состоящий из не более чем 6 городов.
6. В стране 2000 городов. Некоторые из них соединены дорогами так, что между любыми двумя городами есть единственный путь, причём он проходит не более чем по восьми дорогам. Город называется захолустным, если из него выходит не более восьми дорог. Докажите, что в стране найдётся город, соединённый дорогами как минимум с восемью захолустными.
7. На планете 100 государств. Некоторые города соединены дорогами, причём из каждого города выходит не более 10 дорог. В каждом государстве есть город, из которого все дороги выходят только в города из этого государства. Докажите, что есть два города такие, что из одного нельзя попасть в другой не более чем за 2 пересадки.
8. В классе 30 человек, один из них Вася. Каждый из Васиных одноклассников имеет ровно пять общих друзей с Васей. Докажите, что в классе есть ученик с нечётным числом друзей.