Треугольник Паскаля

7–8 класс

2.03.18

Треугольник Паскаля так прост, что выписать его сможет даже десятилетний ребенок. В то же время он таит в себе неисчерпаемые сокровища и связывает воедино различные аспекты математики, не имеющие на первый взгляд между собой ничего общего. Столь необычные свойства позволяют считать треугольник Паскаля одной из наиболее изящных схем во всей математике.

Мартин Гарднер

Определение. Количество способов, которыми можно выбрать k элементов из n, называется *числом сочетаний из n элементов по k* и обозначается C_n^k (читается «цэ из n по k»).

1. Докажите, что $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

2. Мы уже комбинаторно доказывали, что $C_n^{n-k} = C_n^k$ и $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$ (задачи №1 и №2 из предыдущего листочка). Теперь докажите алгебраически.

   Треугольник Паскаля.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C_0^0 & & & & \\
 & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\
 & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\
 & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\
C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

   В треугольнике Паскаля удобно нумеровать строки и места в строках, начинал с нуля. Тогда получится, что C_n^k стоит на k-м месте n-й строки. Поскольку $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$, то в этом треугольнике каждое число, кроме крайних, равно сумме двух расположенных над ним чисел.

3. Докажите по индукции, что сумма чисел в n-ой строке треугольника Паскаля равна 2^n. (Мы это уже доказывали комбинаторно: $C_n^0+\ldots+C_n^k+\ldots+C_n^n = 2^n$ — задача №5 предыдущего листочка.)

4. С помощью треугольника Паскаля докажите, что

$$C_n^0+C_n^2+\ldots+C_n^{2k}+\ldots = 2^{n-1} \quad \text{и} \quad C_n^0-C_n^1+\ldots+(-1)^kC_n^k+\ldots(-1)^nC_n^n = 0.$$

   (Мы это уже доказывали комбинаторно — задачи №6 и №7 предыдущего листочка.)

5. Будем называть лучи, параллельные сторонам треугольника Паскаля, диагоналями. Причём лучи, параллельные правой стороне, будем называть правыми диагоналями, а левой — левыми диагоналями.

   (a) Докажите, что каждое число a в треугольнике Паскаля равно сумме чисел в предыдущей правой диагонали, начиная с самого левого вплоть до стоящего справа над числом a. Другими словами, $C_m^m + C_{m+1}^m + \ldots + C_{m+k}^m + \ldots + C_{m+n}^m = C_{m+n+1}^{m+1}$ (см. рис.).

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & \times & & C_m^m & \\
 & & & & \times & & C_{m+1}^m & & 1 \\
 & & & \times & & \ldots & & \times & \\
 & & \times & & C_{m+k}^m & & \times & & \\
 & \times & & \ldots & & \times & & & \\
\times & & C_{m+n}^m & & \times & & & & \\
 & \times & & C_{m+n+1}^{m+1} & & \times & & &
\end{array}$$

   (b) Докажите, что каждое число a в треугольнике Паскаля равно сумме чисел в предыдущей левой диагонали, начиная с самого правого вплоть до стоящего слева над числом a. Другими словами, $C_m^0 + C_{m+1}^1 + \ldots + C_{m+k}^k + \ldots + C_{m+n}^n = C_{m+n+1}^{n-1}$ (см. рис.).

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & & & & & \\
 & C_m^0 & & \times & & & & & \\
1 & & C_{m+1}^1 & & \times & & & & \\
 & \times & & \ldots & & \times & & & \\
 & & \times & & C_{m+k}^k & & \times & & \\
 & & & \times & & \ldots & & \times & \\
 & & & & \times & & C_{m+n}^n & & \times \\
 & & & \times & & C_{m+n+1}^{n-1} & & \times &
\end{array}$$

   (c) Докажите, что каждое число a в треугольнике Паскаля, уменьшенное на 1, равно сумме всех чисел, заполняющих параллелограмм, ограниченный теми правой и левой диагоналями, на пересечении которых стоит число a (сами эти диагонали в рассматриваемый параллелограмм не включаются). Какие буквы вместо вопросиков должны стоять на рисунке снизу?

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & & C_0^0 & & & & & & \\
 & & \ldots & & \ldots & & & & & \\
 & C_m^0 & & \ldots & & C_m^m & & & & \\
\times & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & & \\
 & \times & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \\
 & & \times & & C_n^? & & \ldots & & C_n^n & \\
 & & & \times & & \ldots & & \ldots & & \times \\
 & & & & \times & & C_?^? & & \times & \\
 & & & & & \times & & \times & & \\
 & & & & & & C_?^? & & &
\end{array}$$