МтФ 2

7–8 класс

13.02.18

Малая теорема Ферма. Пусть a — некоторое число, которое не делится на простое число p. Тогда $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

1. Докажите, что число $30^{239} + 239^{30}$ — составное.

2. Будет ли простым число $257^{1092} + 1092$?

3. Найдите остаток числа $30^{99} + 63^{100} + 77^{101}$ при делении на 31.

4. Для каких n число $n^{2017} - n^5$ делится на 11?

5. Утверждение, обратное малой теореме Ферма, вообще говоря, неверно. Пусть a — некоторое число, взаино простое с $n = 561$. Проверьте, что выполняется сравнение $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$.

6. Пусть p и q различные простые числа. Докажите, что $p^q + q^p \equiv p + q \pmod{pq}$.

7. Докажите, что для любого простого $p \geqslant 3$ число $7^p - 5^p - 2$ делится на $6p$. (Рассмотрите отдельно случаи $p = 3$ и $p > 3$.)

8. Докажите, что для любого простого $p \geqslant 5$ число $3^p - 2^p - 1$ делится на $42p$. (Рассмотрите отдельно случаи $p = 5$, $p = 7$ и $p > 7$.)

9. Докажите, что для любого простого $p > 5$ справедливо, что

(a) число $\underbrace{111\ldots11}_{p-1}$ делится на p;

(b) число $\underbrace{111\ldots11}_{p}$ не делится на p;

(c) число $\underbrace{1\ldots1}_{p}\underbrace{2\ldots2}_{p}\underbrace{3\ldots3}_{p}\ldots\underbrace{9\ldots9}_{p} - 123\ldots9$ делится на p.

10. Докажите, что ни при каком целом k число $k^2 + k + 1$ не делится на 101.

11. Пусть $p > 2$ — простое число. Докажите, что сумма остатков от деления чисел $1^p, 2^p, \ldots, (p-1)^p$ на p^2 равна $(p^3 - p^2)/2$

12. Докажите, что для любого простого p число $2^{2^p} - 4$ делится на $2^p - 1$.