Малая теорема Ферма

7–8 класс

6.02.18

Малая теорема Ферма. Пусть a — некоторое число, которое не делится на простое число p. Тогда $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

Задачи на разбор.

1. Найдите остатки от деления на 103 чисел а) 5^{102}; б) 3^{104}.

2. Найдите остаток от деления 8^{900} на 31.

3. Докажите, что $7^{120} - 1$ делится на 143.

4. Докажите, что $n^7 - n$ делится на 42.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найдите остаток от деления 23^{1600} на 41.

2. Докажите, что $300^{3000} - 1$ делится на 1001.

3. Докажите, что число $40^{81} + 17^{160}$ является составным.

4. Найдите такое n, чтобы число $10^n - 1$ делилось на а) 7; б) 13; в) 91; г) 819.

5. Докажите, что если целое число n не делится на 37, то либо $n^{18} - 1$, либо $n^{18} + 1$ делится на 37.

6. Докажите, что
(a) $n^{13} - n$ делится на 1365;
(b) $n^{17} - n$ делится на 4080 для нечётного n.

7. **(a)** Известно, что $a^{12}+b^{12}+c^{12}+d^{12}+e^{12}+f^{12} \vdots 13$. Докажите, что $abcdef \vdots 13^6$.
(b) Сумма трех чисел a, b и c делится на 30. Докажите, что $a^5+b^5+c^5$ также делится на 30.
(c) Известно, что $a^{24} + b^{24} + c^{24}$ делится на 35. Докажите, что каждое из чисел a, b, c делится на 35.

8. Найдите все такие простые числа p, что число $5^{p^2} - 1$ делится на p.