

# Алгоритм Евклида

7–8 класс

15.12.17

## Задачи на разбор.

- (а) Докажите, что  $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a, b \pm a)$ .
- (б) Пусть  $a$  при делении на  $b$  даёт остаток  $r$  (т. е.  $a = bq + r$ ). Докажите, что  $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, r)$ .
- (с) **Алгоритм Евклида.** Пусть  $a$  и  $b$  — целые положительные числа. Запишем ряд равенств

$$\left\{ \begin{array}{ll} a = bq + r_1 & 0 < r_1 < b, \\ b = r_1q_1 + r_2 & 0 < r_2 < r_1, \\ r_1 = r_2q_2 + r_3 & 0 < r_3 < r_2, \\ \dots & \dots \\ r_{k-2} = r_{k-1}q_{k-1} + r_k & 0 < r_k < r_{k-1}, \\ r_{k-1} = r_kq_k. \end{array} \right.$$

Этот ряд закончится так как  $b > r_1 > r_2 > r_3 > \dots \geq 0$  и поэтому некоторое  $r_{k+1} = 0$ . Докажите, что  $(a, b) = r_k$ .

- Найдите  $\text{НОД}(451, 287)$ ,  $\text{НОД}(728, 273)$ ,  $\text{НОД}(65\,437, 1621)$ .
- Какие значения может принимать  $\text{НОД}(10n+3, 7n+2)$ ? А  $\text{НОД}(7n+13, 5n+6)$ ?

## Задачи для самостоятельного решения.

- Найдите  $\text{НОД}(9163, 3311)$ ,  $\text{НОД}(1\,381\,955, 690\,713)$ .
- Какие значения может принимать  $\text{НОД}(3n+2, 10n+23)$ ?
- Докажите, что  $\text{НОД}(5a+3b, 13a+8b) = \text{НОД}(a, b)$ .
- На какие числа может быть сократима дробь  $\frac{13n+8}{8n+3}$ ? А  $\frac{12n+1}{30n+2}$ ?
- Докажите, что дробь  $\frac{n^2+6n+10}{n+3}$  несократима при всех натуральных  $n$ .
- Найдите  $\text{НОД}(\underbrace{111 \dots 111}_{140 \text{ штук}}, \underbrace{11 \dots 11}_{80 \text{ штук}})$ .
- Найдите  $\text{НОД}(2^{140} - 1, 2^{80} - 1)$ .
- Найдите  $\text{НОД}(\underbrace{111 \dots 111}_n, \underbrace{11 \dots 11}_m)$  и  $\text{НОД}(2^n - 1, 2^m - 1)$ .