Деление с остатком

7–8 класс

8.12.17

Определение. Пусть a, $b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Разделить a на b с остатком — это значит представить a в виде $a = bq + r$, где $0 \leqslant r < |b|$, r, $q \in \mathbb{Z}$. Число q называется неполным частным, а r — остатком.

Теорема. Любое целое число можно поделить на любое другое целое не равное нулю, причём неполное частное и остаток определены однозначно.

Определение. Пусть a, $b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Говорят, что a делится на b, если $a = bk$, $k \in \mathbb{Z}$.

Обозначение. $a \vdots b$ — a делится на b, $b \mid a$ — b делит a.

Задачи на разбор.

1. **Важная теорема.** Докажите, что остаток суммы двух чисел равен остатку суммы остатков. Докажите, что остаток произведения, равен остатку произведения остатков.
2. При делении некоторого числа на 3 получается остаток 1, а при делении его же на 5 — остаток 3. Каким будет остаток от деления этого числа на 15?
3. Найдите остаток при делении 3^{2017} на 7.
4. Докажите, что $n^3 + 2n$ делится на 3 при любом n, а $n^3 + 2$ не делится на 9 при любом n.

Курчатовская школа

Деление с остатком

7–8 класс

8.12.17

Задачи для самостоятельного решения.

1. Поделите с остатком: а) 45 на 7; б) -39 на 6; в) -1 на 3; г) -3 на -8; д) $n-1$ на n, $n > 0$; е) -1 на n, $n > 0$.
2. При делении на 3 некоторое число дает остаток 2, а при делении на 7 — остаток 5. Какой остаток дает это число при делении на 21?
3. Найдите остаток от деления 5^{2017} на 9.
4. Найдите остаток от деления:
   (a) $1001 \cdot 1002 \cdot 1003 + 2001 \cdot 2002 \cdot 2003 \cdot 2004$ на 1000;
   (b) $2016 \cdot 2014 \cdot 2013 + 633^3$ на 7;
   (c) $2015 \cdot 2014 \cdot 2013 + 2017 \cdot 2018 \cdot 2019$ на 2016.
5. Найдите остаток от деления $1 + 5 + 5^2 + \ldots + 5^{2017}$ на 6.
6. Докажите, что $2222^{5555} + 5555^{2222}$ делится на 7.
7. Докажите, что $n^5 + 4n$ делится на 5, при любом n.
8. Докажите, что $n^3 - n$ делится на 24 при любом нечётном n.
9. Найдите наименьшее число, дающее следующие остатки: 1 — при делении на 2, 2 — при делении на 3, 3 — при делении на 4, 4 — при делении на 5, 5 — при делении на 6.
10. Пусть $a + b + c$ делится на 6. Докажите, что $a^3 + b^3 + c^3$ делится на 6.
11. Найдите последнюю цифру числа 7^{7^7}.
12. На доске были написаны 9 последовательных натуральных чисел. Одно из них стерли, после чего сумма оставшихся оказалась равна 2017. Какое число стерли?
13. Какую цифру надо поставить вместо звездочки в числе $123456789 * 987654321$ чтобы полученное число делилось на 37?
14. Будем называть число почти квадратом, если оно либо точный квадрат, либо точный квадрат, умноженный на простое число. Может ли 8 почти квадратов идти подряд?

Материалы занятий: http://math.mosolymp.ru/2018_other_1189