

Чётность как постоянная величина

5–6 класс

26.09.17

1. Хулиганы Вася и Петя рвали стенгазету, а Маша склеивала, причём Петя рвал каждый кусок на 5 частей, Вася на 9, а Маша склеивала из 7 кусков 3. При попытке собрать стенгазету нашли 2016 обрывков. Докажите, что нашли не все кусочки.
2. На столе лежат 16 монет. Из них 15 из них лежат орлами вверх, а одна — решкой вверх. За одну операцию можно перевернуть любые 4 монеты. Можно ли когда-нибудь повернуть все монеты решками вверх?
3. Боян Александрович написал на доске в некотором порядке 2016 плюсов и 2017 минусов. Время от времени Иван Андреевич подходит к доске, стирает любые два знака и пишет вместо них один, причём если он стёр одинаковые знаки, то вместо них он пишет плюс, а если разные, то минус. После нескольких таких действий на доске остался только один знак. Какой?
4. На доске написаны числа $1, 2, 3, \dots, 101$. Разрешается стереть любые два числа и написать вместо них разность этих чисел. Можно ли добиться того, чтобы все числа на доске были нулями?
5. Есть три кучи камней. Разрешается к любой из них добавить столько камней, сколько есть в двух других кучах, или из любой кучи выбросить столько камней, сколько есть в двух других кучах. Например: $(12, 3, 5) \rightarrow (12, 20, 5)$ (или $(4, 3, 5)$). Можно ли, начав с куч 2017, 201 и 21, сделать одну из куч пустой?
6. На прямой сидят три кузнечика, каждую секунду прыгает один кузнечик. Он прыгает через какого-нибудь кузнечика (но не через двух сразу). Докажите, что через 2017 секунд они не могут вернуться в исходное положение.
7. В каждой клетке квадратной таблицы 4×4 стоит «+» или «-». За один ход можно поменять знаки в любой строке или столбце на противоположные. Можно ли через несколько ходов получить таблицу из одних плюсов?

+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	-

(a)

+	+	+	+	+
+	+	+	+	+
+	+	+	+	+
+	+	+	+	+
+	+	+	+	-

(b)