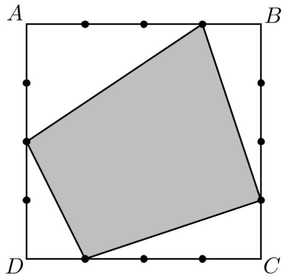
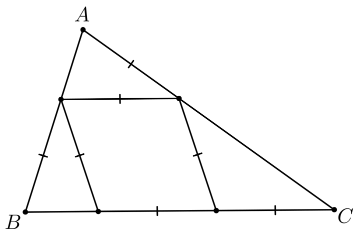
IV Иранская олимпиада по геометрии
7 сентября 2017 г.

Начинающие

1. Каждая сторона квадрата $ABCD$ со стороной 4 поделена на равные части тремя точками. На каждой стороне выбрано по одной из этих точек. Выбранные точки последовательно соединены таким образом, что получился четырёхугольник. Чему может быть равна площадь этого четырёхугольника? Выпишите все возможные значения площади, обосновывать ответ не требуется.



2. Найдите углы треугольника ABC.



3. В правильном пятиугольнике $ABCDE$ прямая, проходящая через точку C перпендикулярно CD, пересекает отрезок AB в точке F. Докажите, что $AE + AF = BE$.

4. На плоскости расположены точки $P_1, P_2, \ldots, P_{100}$, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Для любой тройки точек P_i, P_j, P_k $(i < j < k)$ назовем образованный ими треугольник *правильно ориентированным*, если обход из точки P_i по отрезкам P_iP_j, P_jP_k, P_kP_i происходит в направлении по часовой стрелке. Может ли количество правильно ориентированных треугольников быть равно в точности 2017?

5. Дан равнобедренный треугольник ABC $(AB = AC)$. Пусть l — прямая, проходящая через точку A параллельно BC, D — произвольная точка на прямой l. Обозначим через E и F основания перпендикуляров, опущенных из точки A на BD и CD соответственно. Пусть P и Q — проекции точек E и F на прямую l. Докажите, что $AP + AQ \leqslant AB$.

Продолжительность олимпиады — 240 минут.

Продолжающие

1. В остроугольном треугольнике ABC угол A равен $60°$. Пусть E и F — основания высот из вершин B и C соответственно. Докажите, что
$$CE - BF = \frac{3}{2}(AC - AB).$$

2. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Произвольная прямая, проходящая через B, пересекает ω_1 и ω_2 в точках C и D соответственно. Точки E и F выбраны на ω_1 и ω_2 соответственно так, что $CE = CB$ и $BD = DF$. Пусть прямая BF пересекает ω_1 в точке P, а прямая BE пересекает ω_2 в точке Q. Докажите, что точки A, P, Q лежат на одной прямой.

3. На плоскости даны n точек ($n > 2$), никакие три из которых не лежат на одной прямой. Через каждые две из них проведена прямая, а среди остальных $n - 2$ точек отмечена ближайшая к этой прямой точка (оказалось, что во всех случаях эта точка единственная). Какое наибольшее число точек может быть отмечено для каждого n?

4. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$). Пусть l — прямая, проходящая через точку A параллельно BC, D — произвольная точка на прямой l. Обозначим через E и F основания перпендикуляров, опущенных из точки A на BD и CD соответственно. Пусть P и Q — проекции точек E и F на прямую l. Докажите, что $AP + AQ \leqslant AB$.

5. Пусть X и Y — точки на стороне BC треугольника ABC такие, что $2XY = BC$ (X лежит между B и Y). Пусть AA' — диаметр описанной окружности треугольника AXY. Обозначим через P точку пересечения прямой AX и прямой, проходящей через B перпендикулярно BC, а через Q обозначим точку пересечения прямой AY и прямой, проходящей через C перпендикулярно BC. Докажите, что касательная, проведенная из A' к описанной окружности треугольника AXY, проходит через центр описанной окружности треугольника APQ.

Продолжительность олимпиады — 270 минут.

IV Иранская олимпиада по геометрии
7 сентября 2017 г.

Профессионалы

1. Вписанная окружность треугольника ABC с центром I касается стороны BC в точке D. Прямая DI пересекает прямую AC в точке X. Касательная, проведенная из точки X к вписанной окружности (и отличная от AC), пересекает прямую AB в точке Y. Пусть прямые YI и BC пересекаются в точке Z. Докажите, что $AB = BZ$.

2. Даны шесть попарно непересекающихся кругов, радиус каждого из которых не меньше 1. Докажите, что радиус любой окружности, пересекающей все шесть кругов, также не меньше 1.

3. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. Прямая CO пересекает высоту, проведенную из вершины A, в точке K. Пусть P и M — середины отрезков AK и AC соответственно. Пусть прямые PO и BC пересекаются в точке Y, а описанная окружность треугольника BCM вторично пересекает прямую AB в точке X. Докажите, что четырехугольник $BXOY$ вписанный.

4. Окружности ω_1, ω_2 и ω_3 касаются прямой l в точках A, B и C соответственно (B лежит между A и C), ω_2 внешним образом касается двух других окружностей. Пусть X и Y — точки пересечения ω_2 со второй общей внешней касательной окружностей ω_1 и ω_3. Перпендикуляр, проведённый через точку B к прямой l, вторично пересекает ω_2 в точке Z. Докажите, что окружность, построенная на AC как на диаметре, касается ZX и ZY.

5. Сфера S касается плоскости. Пусть A, B, C, D — четыре точки этой плоскости такие, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Рассмотрим точку A' такую, что S касается граней тетраэдра $A'BCD$. Точки B', C', D' определяются аналогично. Докажите, что точки A', B', C', D' лежат в одной плоскости и плоскость $A'B'C'D'$ касается S.

Продолжительность олимпиады — 270 минут.