Неравенства, связанные с биссектрисами

На этом занятии вам будет предложена серия геометрических неравенств, связанных с биссектрисами треугольника. Для решения некоторых из них надо будет вспомнить (или вывести заново) некоторые факты и соотношения, имеющие отношения к биссектрисам, которые вы встречали на одном из предыдущих занятий или на сборах.

Пример 1. Докажите, что $l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \le p^2$

Решение. Из формулы $l_a = \dfrac{2\sqrt{p(p-a)bc}}{b+c}$, уже доказанной многими из вас, используя неравенство между средними, получим: $l_a \le \sqrt{p(p-a)}$. Тогда справедливы три неравенства: $l_a^2 \le p(p-a)$, $l_b^2 \le p(p-b)$ и $l_c^2 \le p(p-c)$. Складывая их почленно, получим требуемое.

Второй пример гораздо более сложный и демонстрирует метод, который применяется не так часто, поскольку «корнями» уходит в высшую математику.

Пример 2. Внутри треугольника *ABC* отмечена точка *M*. Прямая *AM* вторично пересекает описанную окружность треугольника *ABC* в точке A_1. Докажите, что $\dfrac{BM \cdot CM}{A_1M} \ge 2r$.

Решение. Предварительно докажем лемму.

<u>Лемма</u>. Если прямые *AM*, *BM* и *CM* проходят через центры описанных окружностей треугольников *BMC*, *CMA* и *AMB* соответственно, то *M* – центр вписанной окружности треугольника *ABC*.

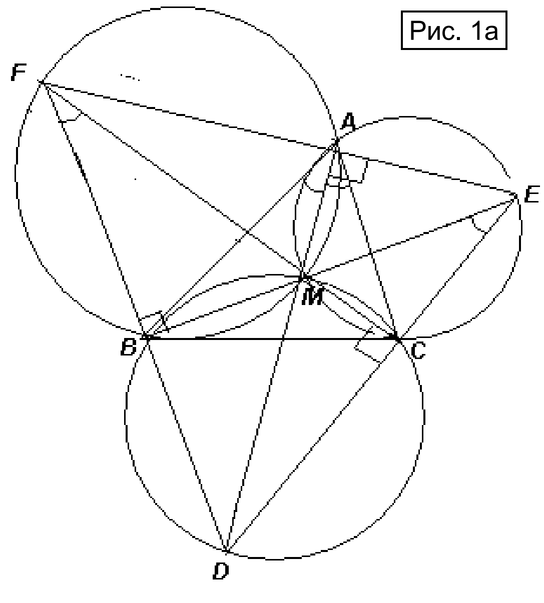

Рис. 1а

<u>Доказательство</u>. Из условия задачи следует, что *DA*, *BE* и *CF* – высоты треугольника *DEF* (см. рис. 1а). Следовательно, четырехугольники *AMBF* и *AMCE* – вписанные. Тогда $\angle BAM = \angle BFM = 90° - \angle BDC = \angle CEM = \angle CAM$, то есть *AM* – биссектриса угла *BAC*. Аналогично доказывается, что *BM* и *CM* – биссектрисы углов *ABC* и *ACB* соответственно.

Отметим, что точки D, E b F – центры вневписанных окружностей треугольника ABC, поэтому доказанное утверждение по сути является теоремой, обратной теореме Мансиона.

Из соображений непрерывности можно обосновать, что наименьшее значение функции $f(M) = \dfrac{BM \cdot CM}{A_1M}$ существует и достигается внутри треугольника. Действительно, это следует из того, что отрезав от вершин треугольника *ABC* очень маленькие треугольники, получим шестиугольник (замкнутое множество), во всех точках которого эта функция определена и непрерывна, так как при малых изменениях положения точки *M* значение $f(M)$ также изменяется мало.

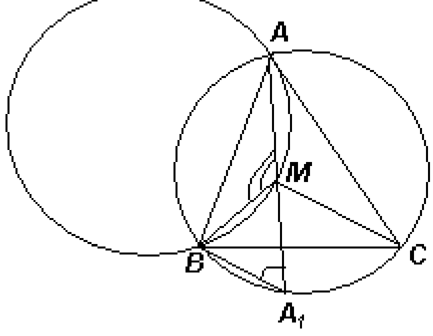

Рис. 1б

Докажем теперь, что это наименьшее значение достигается, если $M \equiv I$. Рассмотрим окружность, описанную около треугольника *AMC* (см. рис. 1б). Пусть точка М «движется» по дуге *AB*. При любом ее положении углы *BAM* и BA_1A – фиксированы. Следовательно, во всех треугольниках BMA_1 фиксированы углы *M* и A_1. Значит, все такие треугольники подобны между собой. Тогда отношение $\frac{BM}{A_1M}$ не зависит от положения точки *M* на дуге *AB*. Если *M* – точка минимума функции $f(M)$, то луч *CM* должен проходить через центр окружности, описанной около треугольника *AMB*, иначе можно было бы уменьшить *CM*, не меняя значения $\frac{BM}{A_1M}$.

Пусть теперь лучи *BM* и *CM* пересекают описанную окружность треугольника *ABC* в точках B_1 и C_1. Тогда $MA \cdot MA_1 = MB \cdot MB_1 = MC \cdot MC_1$, значит, $\frac{BM \cdot CM}{A_1M} = \frac{CM \cdot AM}{B_1M} = \frac{AM \cdot BM}{C_1M}$. Следовательно, прямые *BM* и *CM* должны проходить через центры описанных окружностей треугольников *CAM* и *ABM* соответственно.

Тогда, по доказанной лемме, *M* совпадает с центром *I* вписанной окружности треугольника *ABC*.

Докажем, что $\frac{IB \cdot IC}{IA_1} = 2r$ (*см. задачу 10а из занятия «Соотношения, связанные с биссектрисами»*).

Действительно, точка A_1 – центр окружности, описанной около треугольника *BIC* (см. рис. 1в). Тогда $IB = 2IA_1 \cdot \sin 0{,}5\gamma$. Кроме того, $\sin 0{,}5\gamma = \frac{r}{IC}$ Значит,. $IB = 2IA_1 \cdot \frac{r}{IC}$, то есть $\frac{IB \cdot IC}{IA_1} = 2r$. Таким образом,

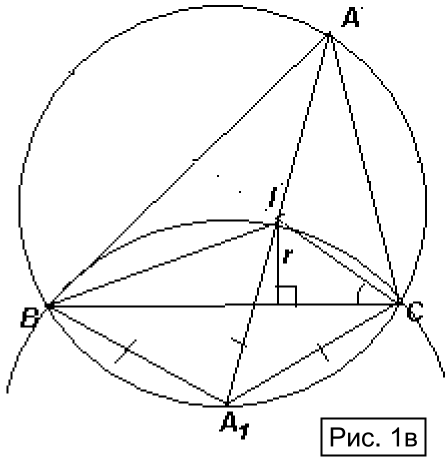

Рис. 1в

$\min f(M) = f(I) = 2r$.Следовательно, $\frac{BM \cdot CM}{A_1M} \geq 2r$, что и требовалось.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. В треугольнике *ABC* биссектриса *AL* пересекает описанную окружность в точке *W*, *I* – центр вписанной окружности. Докажите, что: а) *AI* > *IL*; б) *AW* + *IW* > *max*(*AB*; *AC*).

2. В треугольнике *ABC*: *I* и I_a – центры вписанной и вневписанной окружностей соответственно, *R* и *r* – радиусы описанной и вписанной окружностей. Докажите, что $AI \cdot AI_a > 4Rr$.

3. В треугольнике *ABC* (*AC* > *BC*) проведены биссектрисы *AD* и *BE*. Прямая *DE* пересекает *AB* в точке *P*. Докажите, что угол *ACP* – тупой.

4. В треугольнике *ABC* проведены биссектрисы *AK* и *CM*. Докажите, что если *AB* > *BC*, то *AM* > *MK* > *KC*.

5. Докажите, что: $\frac{l_a}{m_a} + \frac{l_b}{m_b} + \frac{l_c}{m_c}$ > 1 (l_k – биссектрисы треугольника; m_k – его медианы).

6. Докажите, что $l_a + l_b + l_c \leq p\sqrt{3}$ (*p* – полупериметр).

7. Докажите, что в остроугольном треугольнике: $\frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} \leq \sqrt{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$.

8. Докажите, что для любого неравнобедренного треугольника выполняется неравенство $l_1^2 > S\sqrt{3} > l_2^2$, где l_1 и l_2 – наибольшая и наименьшая биссектрисы треугольника, *S* – его площадь.

9. Внутри треугольника *ABC* отмечена точка *M*. Докажите, что $AM \sin\angle BMC + BM \sin\angle CMA + CM \sin\angle AMB \leq p$ (*r* – радиус вписанной окружности, *p* – полупериметр треугольника *ABC*).