24.04.18

Покрытия

На этом занятии вам предлагаются задачи по комбинаторной геометрии, связанные с покрытием фигур другими фигурами. Для решения таких задач почти не существует рецептов, но советую обратить внимание на то, что любые фигуры, как правило удобно покрывать кругами (независимо от того, фигурируют ли круги в условии задачи).

Задачи для самостоятельного решения

1. Круг радиуса 1 покрыт семью одинаковыми кругами. Докажите, что их радиус не меньше, чем 0,5.

2. На столе лежат 5 одинаковых бумажных треугольников. Каждый разрешается сдвигать в любом направлении, но не поворачивать. а) Верно ли, что при любом изначальном расположении каждый из этих треугольников можно накрыть четырьмя другими?
б) Ответьте на тот же вопрос, если лежащие треугольники – равносторонние.

3. Длина проекции фигуры F на любую прямую не превосходит 1. Верно ли, что F можно накрыть кругом диаметра: а) 1; б) 1,5?

4. Два треугольника пересекаются (имеют хотя бы одну общую точку). Докажите, что внутри описанной окружности одного из них или на ее границе лежит хотя бы одна вершина другого.

5. Докажите, что любой треугольник можно разрезать на три меньших треугольника так, чтобы каждую из получившихся частей можно было покрыть двумя другими.

6. В четырёх заданных точках на плоскости расположены прожекторы, каждый из которых может освещать прямой угол (включая границы). Стороны этих углов могут быть направлены на север, юг, запад или восток. Можно ли направить эти прожекторы так, чтобы они осветили всю плоскость?

7. Дан выпуклый пятиугольник, все углы которого тупые. Докажите, что в нем найдутся такие две диагонали, что круги, построенные на них как на диаметрах, полностью покроют весь пятиугольник.

8. В четырёхугольнике длины всех сторон и обеих диагоналей меньше, чем 1. Докажите, что его можно поместить в круг радиуса 0,9.

9. На плоскости расположен круг. Какое наименьшее количество прямых надо провести, чтобы симметрично отражая данный круг относительно этих прямых (в любом порядке и конечное количество раз) можно было накрыть им любую точку плоскости?

10. На плоскости нарисованы 100 кругов, любые два из которых имеют общую точку (возможно граничную). Докажите, что найдётся точка, принадлежащая не менее чем пятнадцати кругам.