Формула Карно

В задаче 8 прошлого занятия было сформулировано важное утверждение, которое называется ***формулой Карно*** (по имени французского математика, физика и политического деятеля Лазаря Карно, 1753 – 1823).

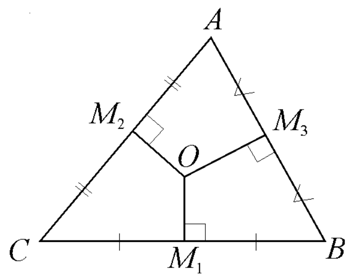

Рис. 1а

Напомню формулировку:

В остроугольном треугольнике сумма расстояний от центра описанной окружности до сторон треугольника равняется сумме радиусов описанной и вписанной окружностей.

В виде формулы это удобно записать так: $OM_1 + OM_2 + OM_3 = R + r$ (в соответствии с обозначениями на. рис. 1а). Эта формула играет важную роль для решения некоторых задач. Некоторые из вас доказали ее с помощью теоремы Птолемея. Сегодня мы рассмотрим другой способ ее доказательства, в процессе которого будут получены другие важные факты.

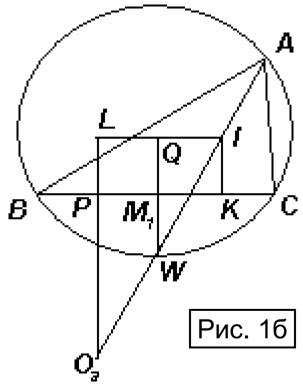

Рис. 1б

Рассмотрим окружность, описанную около треугольника ABC. Пусть биссектриса угла A пересекает ее в точке W, а точка D диаметрально противоположна точке W.

Докажем сначала два вспомогательных факта:

1) $M_1W = \dfrac{r_a - r}{2}$; 2) $M_1D = \dfrac{r_b + r_c}{2}$, где r, r_a, r_b и r_c – радиусы вписанной и вневписанных окружностей, касающихся сторон BC, AC и AB соответственно.

Доказательство. 1) Пусть точки I и O_a соответственно – центры вписанной окружности и вневписанной окружности, касающейся стороны BC, K и P – точки касания этих окружностей с BC (см. рис. 1б), Так как W – середина отрезка IO_a (следствие из теоремы «трилистника») и $WM_1 \parallel IK \parallel LO_a$, то WQ – средняя линия треугольника ILO_a (L и Q – проекции точек O_a и W на прямую, параллельную BC и проходящую через точку I). Следовательно, $WQ = \dfrac{1}{2}O_aL = \dfrac{r_a + r}{2}$, тогда $M_1W = WQ - M_1Q = \dfrac{r_a - r}{2}$.

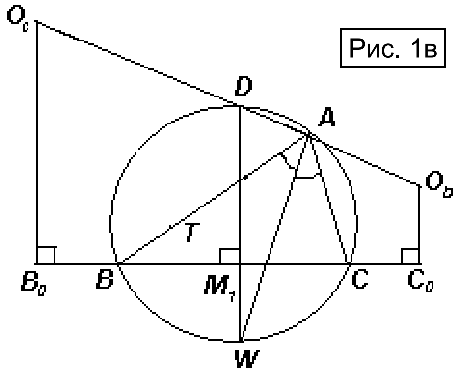

Рис. 1в

2) Так как DW – диаметр окружности, то $\angle DAW = 90°$ (см. рис. 1в). Кроме того, AW – биссектриса угла BAC, поэтому, биссектрисы внешних углов треугольника при вершине A лежат на прямой AD, следовательно на этой прямой лежат и центры O_b и O_c вневписанных окружностей. Опустим перпендикуляры O_cB_0 и O_bC_0 на прямую BC, тогда $O_cB_0 = r_c$, $O_bC_0 = r_b$. Таким образом, $O_bO_cB_0C_0$ – трапеция и утверждение задачи равносильно тому, что отрезок M_1D является ее средней линией.

Заметим, что $BC_0 = CB_0 = p$ (полупериметру треугольника ABC), так как эти отрезки являются расстояниями от вершины треугольника до точки касания вневписанной окружности с продолжением стороны. Кроме того, $BM_1 = CM_1$, поэтому M_1 – середина отрезка B_0C_0. Учитывая, что $KD \parallel O_cB_0 \parallel O_bC_0$, получим требуемое утверждение.

Из 1) и 2) следует, что $\dfrac{r_a - r}{2} + \dfrac{r_b + r_c}{2} = 2R \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{r_a + r_b + r_c = r + 4R}$. Это отдельный важный факт.

Теперь докажем формулу: $OM_1 + OM_2 + OM_3 = 3R - (W_1M_1 + W_2M_2 + W_3M_3) = 3R - \dfrac{r_a + r_b + r_c - 3r}{2} = 3R - \dfrac{r + 4R - 3r}{2} = R + r$.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

Если это не оговорено отдельно, то треугольник, заданный в условии, – остроугольный, r и R – радиусы его вписанной и описанной окружностей соответственно, p – полупериметр, O – центр описанной окружности, H – ортоцентр.

1. Пусть AH_1, BH_2 и CH_3 – высоты треугольника ABC, H – его ортоцентр. Найдите сумму диаметров окружностей, описанных около треугольников AH_2H_3, BH_1H_3 и CH_1H_2, если даны R и r.

2. Докажите, что в треугольнике ABC выполняются неравенства:

а) $\frac{AH+BH+CH}{3} \le R$; б) $OH \ge \frac{R-2r}{3}$.

3. а) Докажите, что $m_a + m_b + m_c \le \frac{9}{2}R$, где m_a, m_b и m_c – длины медиан треугольника.

б) Пусть в треугольнике ABC биссектрисы углов A, B и C пересекают описанную окружность в точках W_1, W_2 и W_3 соответственно. Докажите, что $AW_1 + BW_2$ и $CW_3 \le 6{,}5R - r$.

4. Докажите, что для углов α, β и γ треугольника выполняется неравенство: $\frac{3r}{R} \le \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{3}{2}$.

5. В окружность радиуса R вписан треугольник, а в каждый сегмент, ограниченный стороной треугольника и меньшей из дуг окружности, вписана окружность наибольшего радиуса. Найдите сумму диаметров трех получившихся окружностей и радиуса окружности, вписанной в треугольник.

6. Пусть O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Прямая, проходящая через O и параллельная BC, пересекает AB и AC в точках P и Q соответственно. Известно, что сумма расстояний от точки O до сторон AB и AC равна OA. Докажите, что сумма отрезков PB и QC равна PQ.

7. а) Докажите, что в треугольнике ABC выполняется равенство: $a(OM_2 + OM_3) + b(OM_1 + OM_3) + c(OM_1 + OM_2) = 2pR$.

б) (*Неравенство Эрдеша*) Пусть h_a – наибольшая высота треугольника ABC. Докажите, что $h_a \ge R + r$.

8. а) Запишите формулу Карно для случаев прямоугольного и тупоугольного треугольников и обоснуйте.

б) ×етырехугольник $ABCD$ – вписанный, центр его описанной окружности лежит внутри четырехугольника. Пусть r_1 и r_2 – радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC и ADC, а r_3 и r_4 – радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABD и CBD. Докажите, что $r_1 + r_2 = r_3 + r_4$.

9. а) Докажите, что если точка принадлежит отрезку, соединяющему основания двух биссектрис треугольника, то сумма расстояний от этой точки до двух сторон треугольника равна расстоянию от нее до третьей стороны.

б) Пусть центр O окружности, описанной около треугольника, лежит на отрезке, соединяющем основания двух биссектрис. Докажите, что расстояние от ортоцентра треугольника до одной из его вершин равно $R + r$.

10. Докажите, что в любом треугольнике $r = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.