

Теорема и неравенство Птолемея

Сегодняшнее занятие будет посвящено теореме Птолемея и неравенству Птолемея.

1) Вспомним **теорему Птолемея** и план ее стандартного доказательства.

Если четырехугольник вписан в окружность, то сумма произведений его противоположных сторон равна произведению его диагоналей.

То есть, если $ABCD$ – вписанный четырехугольник, то $|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BD|$. Для доказательства обычно рассматривают такую точку M на диагонали BD , что $\angle DCM = \angle ACB$ (см. рис. 1а). Затем, учитывая равенство вписанных углов, используют две пары подобных треугольников: $\triangle ABC \sim \triangle DMC$ и $\triangle ACD \sim \triangle BCM$.

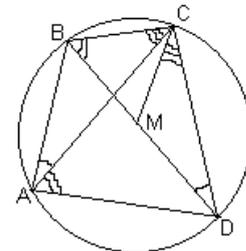


Рис. 1а

Существуют и другие способы доказательства этой теоремы, например, использующие прямую Симсона или теорему косинусов, либо теорему синусов.

2) Обобщением теоремы Птолемея является **неравенство Птолемея**, которое формулируется следующим образом: **в любом четырехугольнике $ABCD$** (в том числе, и в невыпуклом или «вырожденном») **$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$** .

Доказательство. Пусть точки B' , C' и D' лежат на

лучах AB , AC и AD , причем $AB' = \frac{1}{AB}$, $AC' = \frac{1}{AC}$ и

$AD' = \frac{1}{AD}$ (см. рис. 16). Тогда

$\frac{AB'}{AC} = \frac{1}{AB \cdot AC} = \frac{AC'}{AB}$, значит, $\triangle AB'C' \sim \triangle ACB$ (по II

пр.). Следовательно, $B'C' = \frac{BC}{AB \cdot AC}$. Аналогично,

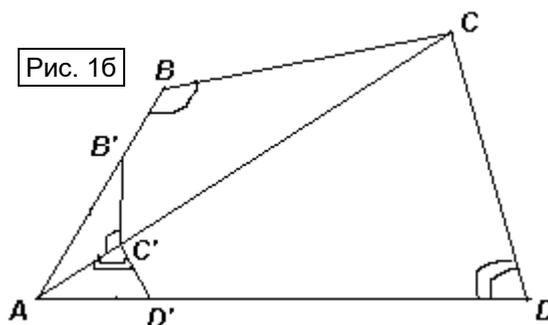


Рис. 16

из подобия треугольников $AC'D'$ и ADC получим, что $C'D' = \frac{CD}{AC \cdot AD}$, а из подобия

треугольников $AB'D'$ и ABD получим, что $B'D' = \frac{BD}{AB \cdot AD}$.

По неравенству треугольника $B'C' + C'D' \geq B'D'$. Подставив полученные выражения в это неравенство и освободившись от знаменателя, получим требуемое.

Выясним, когда достигается равенство. Равенство достигается тогда и только тогда, когда точки B' , C' и D' лежат на одной прямой, то есть $\angle B'C'A + \angle D'C'A = 180^\circ$. Это равносильно тому, что сумма углов B и D данного четырехугольника равна 180° , то есть $ABCD$ – вписанный.

Это же доказательство можно изложить короче, если использовать **инверсию**. Рассмотрим инверсию относительно окружности с центром A радиуса R . Образами точек B , C и D будут точки B' , C' и D' , лежащие на лучах AB , AC и AD соответственно, причем $AB' \cdot AB = AC' \cdot AC = AD' \cdot AD = R^2$. Отсюда сразу получаем равенство $\frac{AB'}{AC} = \frac{AC'}{AB}$ и два других, ему аналогичных. Далее – по тексту.

Более того, подобие треугольников можно получить, используя не определение инверсии, а ее свойство. Оно следует из антипараллельности соответствующих отрезков.

Задачи для самостоятельного решения

1. (Задача Птолемея) В треугольнике ABC : $BC = a$, $AC = b$. Найдите AB , если радиус окружности, описанной около ABC , равен R .

2. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке W . а) Выразите отношение $\frac{AW}{IW}$ через длины сторон треугольника (I – центр окружности, вписанной в треугольник ABC). б) Докажите, что $AW > \frac{AB + AC}{2}$.
3. Точка M лежит на окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC . а) (*теорема Помпею*) Докажите, что сумма расстояний от M до двух вершин треугольника равна расстоянию от M до третьей вершины. б) Укажите все такие точки X плоскости, что из отрезков XA , XB и XC можно составить треугольник.
4. Сумма расстояний от точки X , выбранной вне квадрата, до двух его ближайших соседних вершин равна m . Найдите наибольшее значение суммы расстояний от X до двух других вершин квадрата.
5. Точки A , B , C и D – четыре последовательные вершины правильного семиугольника. Докажите, что: а) $\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$; б) $\frac{1}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{7}}$.
6. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$: $AB = BC = a$, $CD = DE = b$, $EF = FA = c$. Докажите, что $\frac{a}{BE} + \frac{b}{AD} + \frac{c}{CF} \geq \frac{3}{2}$.
7. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, I – центр окружности, вписанной в треугольник ABD . Найдите наименьшее значение BD , если $AI = BC = CD = 2$.
8. В остроугольном треугольнике ABC d_1 , d_2 и d_3 – расстояния от центра O описанной окружности до сторон. Докажите, что $d_1 + d_2 + d_3 = R + r$, где R и r – радиусы описанной и вписанной окружностей данного треугольника.
9. Дан вписанный четырёхугольник, острый угол между диагоналями которого равен φ . Докажите, что острый угол между диагоналями любого другого четырёхугольника с теми же длинами сторон, идущими в том же порядке, меньше, чем φ .
10. Найдите диагонали вписанного четырёхугольника, если даны a , b , c и d – длины его сторон; идущих подряд.