Две вписанные окружности в треугольнике

В большинстве задач этого занятия будут рассматриваться одна и та же конструкция: отрезок CD разбивает треугольник ABC на два треугольника, в каждый из которых вписана окружность. Точки I_1 и I_2 – центры этих окружностей (см. рис. 1).

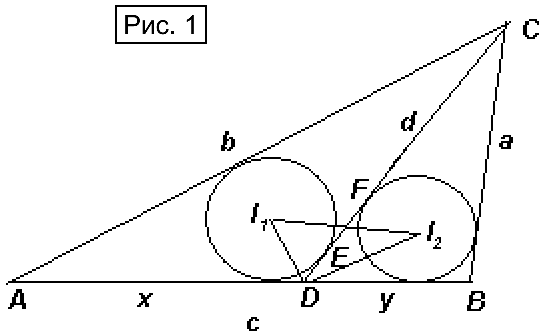
Два свойства этой конструкции – очевидны:

1) Треугольник I_1DI_2 – прямоугольный. Действительно, DI_1 и DI_2 – биссектрисы смежных углов, поэтому $\angle I_1DI_2 = 90°$.

2) $\angle I_1CI_2 = \frac{1}{2}\angle ACB$. Действительно, CI_1 и CI_2 – биссектрисы углов ACD и BCD соответственно (*провести*).

Другие свойства этой конструкции, а также свойства родственных конструкций вы получите по ходу решения задач.

Рис. 1



Упражнения и задачи для самостоятельного решения.

1. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка D. В каждый из треугольников ADC и BDC вписана окружность. Эти окружности касаются отрезка CD в точках E и F.
1) Найдите EF, если $BC = a$, $AC = b$, $AD = x$, $BD = y$;
2) Упростите полученный ответ, если: а) треугольник ABC – равнобедренный с основанием AB; б) CD – медиана; в) CD – биссектриса и $AB = c$; г) D – точка касания со стороной AB окружности, вписанной в треугольник ABC.

2. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка D. Для треугольников ADC и BDC рассматриваются вневписанные окружности, касающиеся AC и BC соответственно. Пусть P и Q – точки касания этих окружностей с прямой DC.
1) Найдите PQ, если $BC = a$, $AC = b$, $AD = x$, $BD = y$.
2) Рассмотрите такие же частные случаи, как и в задаче $1_{2)}$.

3. CD – медиана треугольника ABC. В треугольники ACD и BCD вписаны окружности радиусов r и R ($r < R$). Докажите, что $R < 2r$..

4. Постройте две равные окружности, каждая из которых касается двух сторон данного треугольника и другой окружности.

5. Точки O и I – центры описанной и вписанной окружностей неравнобедренного треугольника ABC. Две равные окружности касаются сторон AB, BC и AC, BC соответственно; кроме этого, они касаются друг друга в точке K. Оказалось, что K лежит на прямой OI. Найдите угол BAC.

6. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D так, что равны радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD. Докажите, что равны радиусы вневписанных окружностей этих треугольников, касающихся сторон BD и CD соответственно.

7. Дан произвольный треугольник ABC. Постройте прямую, проходящую через точку C и разбивающую его на два треугольника с равными радиусами вписанных окружностей.

8. Точка D выбрана на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC так, что окружности, вписанные в треугольники ACD и BCD, имеют равные радиусы. Докажите, что $S_{ABC} = CD^2$.

9. В треугольнике ABC проведена медиана CD. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, а точки J_1 и J_2 – центры вневписанных окружностей этих треугольников, касающихся сторон AC и BC соответственно. Докажите, что эти четыре точки лежат на одной окружности.

10. В треугольнике ABC проведена медиана AM. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей, вписанных в треугольники ABM и ACM, N – середина дуги BC (содержащей вершину A). Докажите, что точки A, N, I_1 и I_2 лежат на одной окружности.