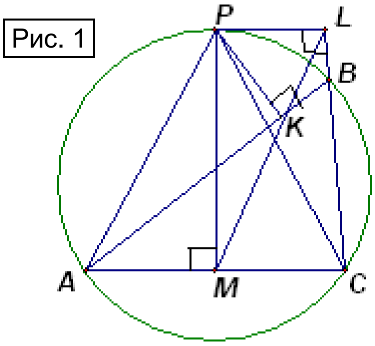
Прямая Симсона

На этом занятии мы рассмотрим ряд задач, которые эффективно решаются, если использовать ***прямую Симсона***. Напомню ***теорему*** об этой прямой.

Теорема. Основания перпендикуляров, опущенных на стороны треугольника (или их продолжения) из точки, лежащей на описанной около этого треугольника окружности, лежат на одной прямой.



Доказательство. Пусть точки *M*, *К* и *L* – основания перпендикуляров, опущенных из точки *P* на прямые *AC*, *AB* и *BC* соответственно (см. рис. 1). Используя, что $\angle APC = \angle ABC$, докажем, что углы *AKM* и *BKL* – вертикальные. Действительно, четырехугольники *AMKP* и *MPLC* – вписанные. Следовательно, $\angle APM = \angle AKM$ и $\angle CPM = \angle CLM$ (вписанные, опирающиеся на одну дугу). Тогда $\angle BKL = \angle ABC - \angle CLM = \angle APC - \angle CPM = \angle APM = \angle AKM$.

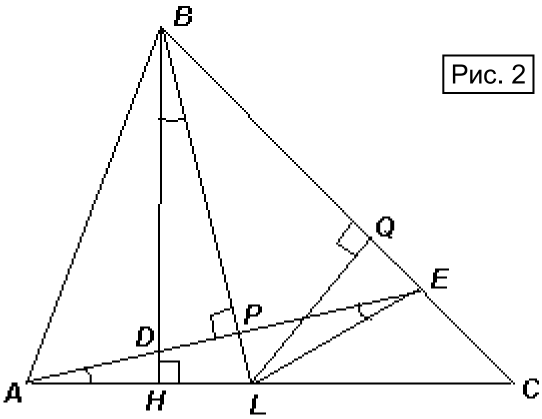
Так как точки *A*, *K* и *B* лежат на одной прямой, то точки *M*, *К* и *L* также лежат на одной прямой, что и требовалось.

Для того, чтобы не рассматривать различные случаи расположения точек K, L и M можно использовать ориентированные углы.

Существует и другой способ доказательства, использующий подобие треугольников и теорему Менелая (он изложен, например, в учебнике Геометрия 8-9 под ред. А.Д. Александрова).

Умение работать с прямой Симсона помогает при решении ряда задач, в которых требуется доказать, что три точки лежат на одной прямой. Основная идея будет понятна при разборе следующей задачи.

Пример. В треугольнике *ABC* проведены высота *BH* и биссектриса *BL*. Точки *P* и *Q* – основания перпендикуляров, опущенных из *A* на *BL* и из *L* на *BC* соответственно. Докажите, что точки *H*, *P* и *Q* лежат на одной прямой (см. рис. 2).



Решение. Заметим, что точки *H*, *P* и *Q* – это основания перпендикуляров, опущенных из точки *L* на прямые *BH*, *AP* и *BC* соответственно. Поэтому достаточно доказать, что *L* лежит на окружности, описанной около треугольника, образованного этими прямыми. Это треугольник *BDE*, где *D* и *E* – точки пересечения прямой *AP* с *BH* и *BC* соответственно.

Действительно, точки *A* и *E* симметричны относительно *BL*, значит, $\angle LAP = \angle LEP$. Кроме того, $\angle LAP = 90^\circ - \angle BLA = \angle LBD$. Следовательно, $\angle LED = \angle LBD$, то есть точки *L*, *D*, *B* и *E* лежат на одной окружности.

В некоторых случаях перпендикуляры, которые надо увидеть, чтобы распознать прямую Симсона, «спрятаны» в виде середин отрезков или точек касания прямых и окружностей. Итак, серия задач: «Увидеть и использовать прямую Симсона».

Задачи для самостоятельного решения

1. Окружность с центром I, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и BC в точках C_0 и A_0 соответственно. Окружность, проходящая через точки B и I, пересекает стороны AB и BC в точках X и Y. Докажите, что середина отрезка XY лежит на прямой A_0C_0.

2. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D. Точки E и F симметричны точке D относительно биссектрис углов A и C. Докажите, что середина отрезка EF лежит на прямой A_0C_0, где C_0 и A_0 – точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами AB и BC.

3. На биссектрисе угла ABC зафиксирована точка F. Рассматриваются равнобедренные треугольники A_1FC_1, где точки A_1 и C_1 лежат на лучах BA и BC соответственно. Найдите геометрическое место середин их оснований A_1C_1.

4. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса AE. Радиус OE описанной окружности треугольника AEC пересекает биссектрису угла ACB в точке L. .Докажите, что L лежит на средней линии треугольника AEC.

5. Окружность, центр которой лежит на серединном перпендикуляре к стороне AC треугольника ABC, касается стороны BC в точке A_0, а продолжения стороны AB заточку B – в точке C_0. Докажите, что прямая A_0C_0 проходит через середину стороны AC.

6. В треугольнике ABC угол B равен $60°$. Пусть AA_1 и CC_1 – биссектрисы этого треугольника. Докажите, что точка, симметричная вершине B относительно прямой A_1C_1 ,лежит на стороне AC.

7. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Из точки D опущены перпендикуляры DB' и DC' на прямые AC и AB. На прямой $B'C'$ отмечена точка M так, что $MD \perp BC$. Докажите, что точка M лежит на медиане AA_0 треугольника ABC.

8. Окружность с центром I, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и CA в точках C', A' и B' соответственно. Медиана AA_0 треугольника ABC пересекает $B'C'$ в точке D. Докажите, что точка I лежит на прямой DA'.

9. Окружность с центром I, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и CA в точках C', A' и B' соответственно. AL – биссектриса треугольника ABC, D – точка пересечения прямых $A'I$ и $B'C'$. Докажите, что $DL \parallel AA'$.

10. Окружность с центром I, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и CA в точках C', A' и B' соответственно. Точка B_1 симметрична точке B' относительно прямой $A'C'$, а точка B_2 является пересечением прямых BB_1 и AC. Аналогично определяются точки A_2 и C_2. Докажите, что точки A_2, B_2 и C_2 лежат на прямой, проходящей через центр описанной окружности треугольника ABC.