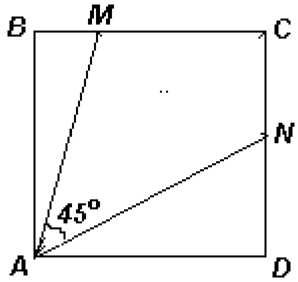
Угол в квадрате

Речь пойдет об удивительной геометрической конструкции, возникшей на основе ряда задач замечательного математика Вячеслава Викторовича Произволова.

Рис. 1

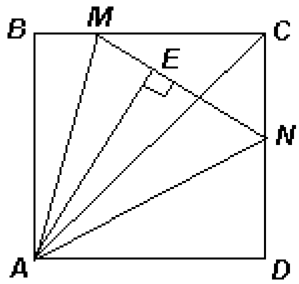


С одной из этих задач мы уже встречались, причем не один раз.

Задача.. На сторонах *BC* и *CD* квадрата *ABCD* выбраны точки *M* и *N* соответственно так, что угол *MAN* равен 45° (см. рис. 1). Докажите, что расстояние от точки *A* до прямой *MN* равно стороне квадрата.

Разберем три способа решения этой задачи (последний способ – авторский).

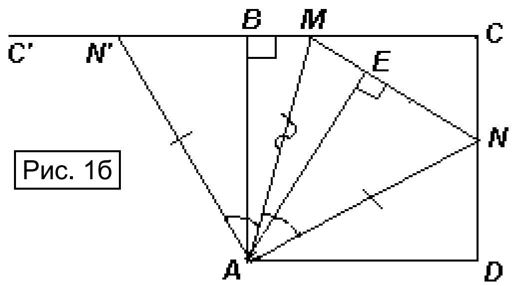
Рис. 1а



Решение. Проведем отрезок *MN* и опустим на него перпендикуляр *AE* (см. рис. 1 а – в).

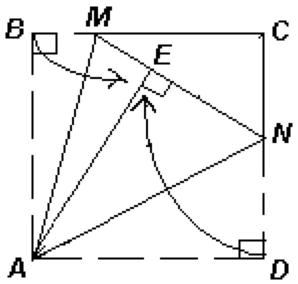
Первый способ. Проведем диагональ *AC* квадрата и рассмотрим треугольник *CMN* (см. рис. 1а). Точка *A* лежит на биссектрисе угла *C* этого треугольника и $\angle MAN = 90° - \frac{1}{2}\angle C$, следовательно, точка *A* является центром вневписанной окружности треугольника *CMN*. Тогда *AE* = *AB* = *AD* (радиусы этой окружности).

Рис. 1б



Второй способ. Рассмотрим поворот с центром *A* на угол 90° против часовой стрелки. Образом вершины *D* будет являться вершина *B*, образом прямой *DC* – прямая *BC*', ей перпендикулярная, поэтому точка *N*' (образ точки *N*) будет лежать на отрезке *BC*' (см. рис. 1б). Так как $\angle NAN' = 90°$, то $\angle MAN' = \angle MAN$, значит, треугольник *AMN*' равен треугольнику *AMN* (*по двум сторонам и углу между ними*). Следовательно, равны и их соответствующие высоты, то есть *AE* = *AB*.

Рис. 1в



Третий способ. «Перегнем» квадрат по прямым *AM* и *AN*. Так как $\angle BAM + \angle DAN = \angle MAN$ и *AB* = *AD*, то после таких перегибов отрезки *AB* и *AD* совместятся (см. рис. 1в). Кроме того, $\angle ABM = \angle ADN = 90°$, значит из точки, в которой оказались вершины *B* и *D*, отрезки *AM* и *AN* видны под прямым углом, а этому условию удовлетворяет только точка *E*. Значит, *AE* = *AB* = *AD*.

Этот авторский прием, конечно, имеет и «научное» обоснование. Он основан на том, что композиция двух осевых симметрий с пересекающимися осями является поворотом на удвоенный угол между осями с центром в точке их пересечения. В данном случае речь идет о повороте с центром A на угол 90°, который является композицией симметрий относительно прямых AM и AN.

Задачи для самостоятельного решения

1. На сторонах *BC* и *CD* квадрата *ABCD* выбраны точки *M* и *N* соответственно. Докажите, что периметр треугольника *CMN* равен половине периметра квадрата тогда и только тогда, когда угол *MAN* равен 45°.

2. На сторонах *BC* и *CD* квадрата *ABCD* выбраны точки *M* и *N* соответственно так, что угол *MAN* равен 45°. Диагональ *BD* пересекает *AM* и *AN* в точках *P* и *Q* соответственно. Докажите, что: а) точки *A*, *B*, *M*, *Q* (равно как и точки *A*, *D*, *N*, *P*) лежат на одной окружности; б) общая хорда этих окружностей перпендикулярна *MN*; в) отрезки *MQ*, *NP* и

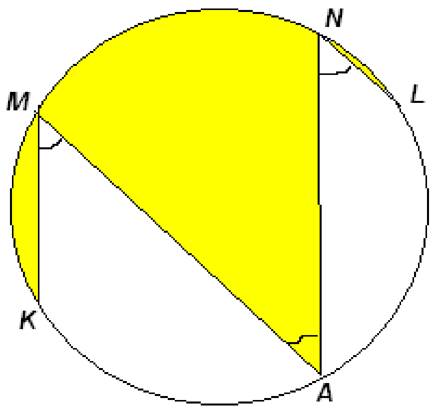
AE, где *E* – основание перпендикуляра, опущенного из *A* на *MN*, пересекаются в одной точке *H*; г) четырехугольник *PQNM* – вписанный; ä) $S_{\Delta MAN} = 2S_{\Delta PAQ}$; е) $AH = MN = PQ\sqrt{2}$.

3. На сторонах *BC* и *CD* квадрата *ABCD* выбраны точки *M* и *N* соответственно так, что угол *MAN* равен 45°. Лучи *AM* и *AN* пересекают описанную окружность квадрата в точках M_1 и N_1 соответственно. Докажите, что $M_1N_1 \parallel MN$.

4. В равнобедренном прямоугольном треугольнике *BAD* на гипотенузе *BD* выбраны точки *P* и *Q* так, что $\angle PAQ = 45°$ (*P* лежит между *B* и *Q*). Докажите, что $PQ^2 = BP^2 + DQ^2$.

5. Вневписанная окружность прямоугольного треугольника *ABC* касается продолжений его катетов *CA* и *CB* в точках A_1 и B_1 соответственно. Описанная окружность треугольника *ABC* пересекает A_1B_1 в точках *P* и *Q*. Найдите угол *PCQ*.

6. а) На сторонах *BC* и *CD* квадрата *ABCD* выбраны точки *M* и *N* соответственно так, что угол *MAN* равен 45°. Докажите, что центр описанной окружности треугольника *MAN* лежит на диагонали *AC*. б) Окружность с центром на диагонали *AC* квадрата *ABCD* проходит через вершину *A* и пересекает стороны *BC* и *CD* в точках *M* и *N*. Докажите, что угол *MAN* равен 45°.



7. На сторонах *AB*, *BC*, *CD* и *AD* квадрата *ABCD* взяты соответственно точки *K*, *M*, *N* и *L* так, что $\angle KMA = \angle MAN = \angle LNA = 45°$. а) Докажите, что точки *A*, *K*, *M*, *N* и *L* лежат на одной окружности. б) Пусть *KL* пересекает *AM* и *AN* в точках *F* и *G* соответственно. Докажите, что $S_{\Delta KMF} + S_{\Delta LNG} = S_{\Delta FAG}$.

8. Вершины ломаной *KMANL* лежат на окружности и $\angle KMA = \angle MAN = \angle NAL = 45°$. Докажите, что: а) площадь закрашенной части равна половине площади круга (см. рисунок); б) $KM^2 + AN^2 = AM^2 + LN^2$.

9. Внутри квадрата *ABCD* выбраны точки *S* и *T* так, что $\angle SAT = \angle SCT = 45°$. Докажите, что $BS \parallel DT$.