

## Разной\_9

Сегодня вам предлагается подборка задач разной тематики в качестве тренировки. Большинство из них так или иначе связано с ранее изученными темами занятий. Нумерация задач весьма условна с точки зрения их трудности, поэтому выбирайте задачи, которые нравятся.

## Задачи для самостоятельного решения

1. По горизонтальной прямой  $s$  произвольным образом «катаются» две окружности, радиусы которых  $r$  и  $R$ . К ним проведены две общие внутренние касательные, пересекающиеся в точке  $M$ . По какой траектории движется точка  $M$ ?
2. В параллелограмме  $ABCD$  проведены высоты  $BK$  и  $BH$ ;  $KH = a$ ;  $BD = b$ . Найдите расстояние от вершины  $B$  до ортоцентра треугольника  $BKH$ .
3. Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность с центром  $O$ , лежащим внутри четырёхугольника. Сумма углов  $AOB$  и  $COD$  равна  $180^\circ$ . Из точки  $O$  опущены перпендикуляры на каждую сторону четырёхугольника. Докажите, что сумма длин этих перпендикуляров равна полупериметру  $ABCD$ .
4. На катетах прямоугольного треугольника выбираются точки  $P$  и  $Q$ , из которых опускаются перпендикуляры  $PK$  и  $QH$  на гипотенузу. Найдите наименьшее значение суммы  $KP + PQ + QH$ , если длины катетов  $a$  и  $b$ .
5. В остроугольном треугольнике  $ABC$  ортоцентр  $H$  делит высоту  $CC_1$  в отношении  $3 : 1$ , считая от вершины. Найдите угол  $AMB$ , где  $M$  – середина этой высоты.
6. Две окружности радиуса 1 пересекаются в точках  $X$  и  $Y$ , расстояние между которыми также равно 1. Из точки  $C$  одной окружности проведены касательные  $CA$  и  $CB$  к другой. Прямая  $CB$  вторично пересекает первую окружность в точке  $A'$ . Найдите длину  $AA'$ .
7. Найдите ГМТ, являющихся серединами отрезков с концами на диагоналях данного квадрата.
8. В треугольнике  $ABC$  проведены медиана  $AM$ , биссектриса  $AL$  и высота  $AH$ . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , если  $AL = t$ ,  $AH = h$  и  $L$  – середина отрезка  $MH$ .
9. Диагонали трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ . Описанные окружности треугольников  $AOB$  и  $COD$  второй раз пересеклись в точке  $M$ . Прямая  $OM$  пересекает окружности, описанные около треугольников  $BOC$  и  $AOD$ , в точках  $K$  и  $L$  соответственно. Докажите, что  $M$  – середина отрезка  $KL$ .