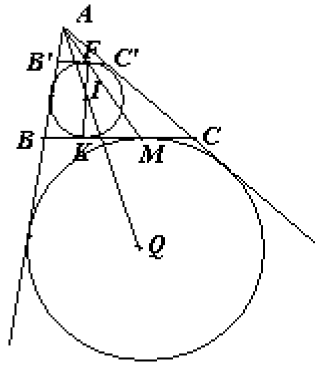
Гомотетия и поворотная гомотетия

Большинство задач этого занятия эффективно решаются с помощью гомотетии, хотя, в некоторых случаях (но не во всех!), можно обойтись и подобием треугольников.

Вспомним определение и простейшие свойства гомотетии.

Она часто помогает в тех случаях, когда надо доказать, что три точки лежат на одной прямой. Рассмотрим известную вам конструкцию.

Пример 1. В треугольнике ABC: I и Q – центры вписанной и вневписанной окружностей соответственно, K и M – точки касания этих окружностей со стороной BC, точка F диаметрально противоположна точке K (см. рис.). Докажите, что точки A, F и M лежат на одной прямой



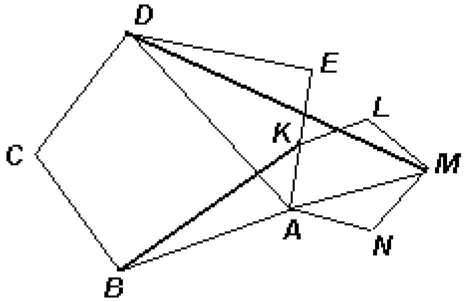
Решение. При гомотетии с центром A и коэффициентом $k=\dfrac{AQ}{AI}$ вневписанная окружность переходит во вписанную. Образом касательной BC к вневписанной окружности при указанной гомотетии является касательная $B'C'$ к вписанной окружности, причем $B'C' \parallel BC$ (см. рис.). Поэтому, образом точки M является точка касания $B'C'$ и вписанной окружности, которая совпадает с точкой F, поскольку диаметр FK, перпендикулярный BC, перпендикулярен также и $B'C'$.

Упражнение. На этом же чертеже проведем луч AK, который вторично пересечет вневписанную окружность в точке E. Докажите, что $ME \perp BC$.

Два доказанных утверждения являются «двойственными» для вписанной и вневписанной окружностей, так как эти окружности как бы меняются «ролями». При решении задач вы опять встретитесь с такими «двойственными» утверждениями.

Вспомним также, что такое поворотная гомотетия.

Пример 2. Даны два правильных пятиугольника $ABCDE$ и $AKLMN$ (см. рис.). Найдите угол между прямыми BK и DM.



Решение. Рассмотрим поворотную гомотетию с центром в точке A, переводящую точку B в точку D. Так как коэффициент этой гомотетии равен отношению диагонали и стороны правильного пятиугольника, то образом точки K является точка M. Следовательно, образом прямой BK является прямая DM, а искомый угол равен углу поворота.

Ответ: $72°$.

Поворотная гомотетия часто применяется в конструкциях из двух «сцепленных» подобных фигур.

Задачи для самостоятельного решения

1. Через середины сторон треугольника проведены прямые, соответственно параллельные биссектрисам противолежащих углов треугольника. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.

2. На стороне BC треугольника ABC постройте точку M так, чтобы прямая, проходящая через основания перпендикуляров, опущенных из M на прямые AB и AC, была параллельна прямой BC.

3. а) Докажите, что середина высоты треугольника, центр вписанной в него окружности и точка касания стороны, на которую опущена высота, с соответствующей вневписанной окружностью, лежат на одной прямой.

б) Сформулируйте и докажите «двойственное» утверждение.

4. (***Лемма о сегменте***) Две окружности касаются внутренним образом в точке M. Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности в точке P. Докажите, что MP – биссектриса угла AMB.

5. В равнобедренном треугольнике *ABC* с основанием *AB* проведена высота *CD* и перпендикуляр *DE* к стороне *BC*, *M* – середина отрезка *DE*. Докажите, что прямые *AE* и *CM* перпендикулярны.

6. а) Через середину *D* стороны *BC* треугольника *ABC* и центр *I* окружности, вписанной в этот треугольник, проведена прямая, пересекающая высоту *AH* в точке *E*. Докажите, что отрезок *AE* равен радиусу вписанной окружности.

б) Биссектриса угла *A* пересекает окружность, описанную около треугольника *ABC*, в точке *W*. Окружность, вписанная в треугольник *ABC*, касается стороны *BC* в точке *K*, *P* – точка пересечения прямой *WK* с высотой *AH*. Докажите, что отрезок *HP* равен радиусу вписанной окружности.

7. а) Через середину *D* стороны *BC* треугольника *ABC* и центр *Q* вневписанной окружности, касающейся этой стороны, проведена прямая, пересекающая высоту *AH* в точке *T*. Докажите, что отрезок *AT* равен радиусу этой вневписанной окружности.

б) Биссектриса угла *A* пересекает окружность, описанную около треугольника *ABC*, в точке *W*, *M* – точка касания вневписанной окружности со стороной *BC*, *Z* – точка пересечения прямой *WM* с высотой *AH*. Докажите, что отрезок *HZ* равен радиусу этой вневписанной окружности.

8. Дан остроугольный треугольник *ABC*. Найдите геометрическое место центров прямоугольников *PQRS* таких, что точки *P* и *Q* лежат на стороне *AC*, а точки *R* и *S* – на сторонах *AB* и *BC* соответственно.

9. На сторонах треугольника *ABC* внешним образом построены подобные треугольники: *A'BC*, *B'CA* и *C'*AB (вершины указаны в порядке соответствия). Докажите, что центроиды треугольников *ABC* и *A'B'C'* совпадают.

10. По двум пересекающимся прямым с постоянными, но не равными скоростями V_A и V_B соответственно, движутся точки *A* и *B*. Докажите, что существует такая точка *O*, что в любой момент времени *AO* : *BO* = V_A : V_B и объясните ее построение.