Серия 24. Финальный разнобой.

1. Прямая ℓ пересекает отрезок BC в точке D. Постройте на ℓ всевозможные точки X, удовлетворяющие условию: $\angle BXD - \angle XBD = \angle CXD - \angle XCD$.

2. (*С отбора в «Команду» 9 класса*) На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC отмечены точки P и Q соответственно так, что прямая PQ параллельна BC и проходит через центр описанной окружности. Точка M — середина отрезка AH, где H — ортоцентр. Докажите, что $\angle BMP = \angle CMQ$.

3. Треугольники ABC и $AB'C'$ соответственно равны и одинаково ориентированны. Прямые BC и $B'C'$ пересекаются в точке X; O — центр описанной окружности треугольника $CB'X$. Докажите, что $BC' \perp AO$.

4. Точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон треугольника ABC. На отрезках BA_1, CA_1 отмечены точки X и Y соответственно так, что $BX = CY$. Описанная окружность ω треугольника AXY вторично пересекает стороны AB и AC в точках P и Q соответственно. Обозначим через K, M, N точки пересечения пар лучей PX и QY, PX и B_1A_1, QY и C_1A_1 соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника KMN касается ω.