Серия 23. Комплексные координаты, часть 2.

При работе с биссектрисами и серединами дуг возникает извечная проблема: биссектриса угла неотличима от биссектрисы внешнего угла, а середина дуги — от середины дополняющей дуги. По смыслу при нахождения формул для этих объектов необходимо использование квадратного корня, но в поле комплексных чисел эта операция также неоднозначна. Одним из способов преодоления этой проблемы является введение хитрых параметров.

Утверждение. В треугольнике ABC отмечены середины A_0, B_0, C_0 «меньших» дуг BC, CA, AB соответственно. Тогда существуют такие комплексные числа u, v, w, по модулю равные 1, что $a = -vw/u, b = -wu/v, c = -uv/w, a_1 = u, b_1 = v, c_1 = w$.

1. В неравнобедренном треугольнике ABC биссектрисы углов B и C пересекают стороны AC, AB в точках B_1, C_1, а также «меньшие» дуги AC, AB описанной окружности ω в точках B_0, C_0 соответственно. А ещё они пересекают друг друга в точке I. Прямые B_0C_0 и B_1C_1 пересекаются в точке X. Докажите, что $XI \parallel BC$. *Это не самая простая задача с вычислительной точки зрения.*

2. Вписанная окружность остроугольного неравенобедренного треугольника ABC имеет центр I и касается его сторон BC, CA, AB в точках P, Q, R соответственно. В треугольнике также проведены высоты BE и CF. Докажите, что отражение I относительно RQ служит центром вписанной окружности треугольника AEF.

3. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон BC, CA, AB в точках P, Q, R соответственно. Точка S — середина меньшей дуги QR. Отрезки SP, SB, SC пересекают отрезок QR в точках T, M, N. Докажите, что M и N — середины отрезков TR и TQ.

4. Обозначим через A', B', C' точки касания вневписанных окружностей треугольника ABC с отрезками BC, CA, AB соответственно. Сквозь точки A', B', C' провели прямые, соответственно параллельные биссектрисам углов при вершинах A, B, C треугольника. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.

5. На описанной окружности треугольника ABC отмечены точки P и Q. Точка A' на стороне BC такова, что прямые PA' и QA' симметричны относительно прямой BC. Аналогично определяются точки B', C'. Докажите, что A', B', C' лежат на одной прямой.

Практические рекомендации.

- Выработайте план решения. Разберитесь, что и в каком порядке Вы будете делать. И прежде чем приступать к реализации плана, потратьте не менее 5-10 минут на его оптимизацию: попробуйте переопределить точки поудобнее или заменить условия на равносильные, но алгебраически более простые.
- Вводите симметричные и однородные обозначения. В финале решения получатся симметричные однородные многочлены, и их легко будет разложить.
- Считайте аккуратно. Не делайте два алгебраических преобразования одновременно. К примеру, если надо раскрыть скобки и привести подобные, то сначала раскройте скобки, и только потом приведите подобные. Не экономьте бумагу; не пишите на клочках, полях и в случайных местах страницы.
- В финальном тождестве **никогда** не раскрывайте скобки; наоборот, раскладывайте многочлены на множители.
- Часто какая-то точка или какое-то условие симметрично зависит от двух стартовых параметров b и c. Попробуйте подставить в координату точки или в уравнение условия $b = c$ или $b = -c$. Если выражение занулилось, то оно делится соответственно на $(b - c)$ или $(b + c)$.
- Если надо преобразовать выражение и преобразовать сопряжённое выражение, то достаточно преобразовать одно из них, а потом навесить сопряжение. В частности, при проверке коллинеарности точек X, Y, Z можно до упора упрощать $\frac{x-y}{x-z}$, и только потом находить к нему сопряжённое.
- Иногда сопряжённые точки выражаются простыми формулами, а сами точки — нет. Вместо того, чтобы находить сами точки, можно переписать доказываемое в терминах сопряжённых точек. Примеры: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff \bar{b} - \bar{a} = \bar{d} - \bar{c}$; X, Y, Z коллинеарны $\iff \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\bar{x}-\bar{z}} \in \mathbb{R}$; $\measuredangle PQR = \measuredangle XYZ \iff \frac{\bar{p}-\bar{q}}{\bar{r}-\bar{q}} \cdot \frac{x-y}{z-y} \in \mathbb{R}$.
- Координаты точек на единичной окружности легко восстанавливаются по мерам дуг, так как аргументом комплексного числа x/y служит длина ориентированной дуги $\overset{\frown}{XY}$ (где X, Y на единичной окружности). Пример: если AD и BC — перпендикулярные хорды единичной окружности, то $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{DC} = \pm 180^\circ$, откуда $(b/a) \cdot (c/d) = -1$ и $d = -bc/a$.
- Полезно вводить дополнительные точки на единичной окружности (например, второй раз пересекать прямые из условия с окружностью), так как они позволяют писать простые уравнения прямых; сами точки часто могут быть найдены исходя из мер дуг.
- Коллинеарность трёх точек X, Y, Z может быть записана тремя способами: $\frac{y-x}{z-x} \in \mathbb{R}$, $\frac{x-y}{z-y} \in \mathbb{R}$, $\frac{x-z}{y-z} \in \mathbb{R}$. Выбирайте из них самый удобный.
- То же самое касается и условия коцикличности точек. Условие коцикличности точек — это по сути равенство двух углов. Во-первых, можно выбрать, какую пару углов сравнивать. Во-вторых, один из углов может выражаться через меры дуг единичной окружности, что невероятно упрощает формулы.