Серия 22. Комплексные координаты.

1. (*Теорема Ньютона*) Докажите, что центр вписанной в четырёхугольник окружности лежит на прямой, соединяющей середины диагоналей этого четырёхугольника.

2. Докажите, что середины трех отрезков, соединяющих проекции произвольной точки плоскости на пары противоположных сторон или диагоналей вписанного в окружность четырехугольника, лежат на одной прямой.

3. Остроугольный неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O. Прямая AO вторично пересекает ω в точке A'. Касательная к ω, восстановленная в точке A', пересекает BC в точке X. Прямая XO пересекает стороны AB и AC в точках P и Q. Докажите, что O — середина PQ.

4. На окружности ω отмечены две точки A и B. Касательные к ω к точкам A и B пересекаются в точке S. Хорда XY окружности ω проходит через середину M отрезка AB. Докажите, что $\angle XSM = \angle MSY$.

5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы при вершинах A, B, C равны. Докажите, что прямая Эйлера треугольника ABC проходит через D.

6. Из основания A_1 биссектрисы AA_1 неравнобедренного треугольника ABC провели вторую касательную ко вписанной окружности, точку касания обозначили K_A. Аналогично строятся точки K_B, K_C. Докажите, что прямые, соединяющие K_A, K_B, K_C с серединами соответствующих сторон треугольника, пересекаются в точке, лежащей на вписанной в треугольник окружности.

Общие формулы. Условие типа $z \in \mathbb{R}$ равносильно соотношению $z = \bar{z}$.

- $|AB|^2 = (a-b)(\bar{a}-\bar{b})$;
- A, B, C коллинеарны $\iff \frac{a-b}{a-c} \in \mathbb{R}$
- $AB \parallel CD \iff \frac{a-b}{c-d} \in \mathbb{R}$.
- $AB \perp CD \iff \frac{a-b}{c-d} \in i\mathbb{R}$.
- $\measuredangle A_1B_1C_1 = \measuredangle A_2B_2C_2 \iff \frac{a_1-b_1}{c_1-b_1} : \frac{a_2-b_2}{c_2-b_2} \in \mathbb{R}$.
- A, B, C, D коцикличны $\iff \frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} \in \mathbb{R}$.
- Формула для скалярного произведения $(u, v) = \frac{1}{2} \cdot (u\bar{v} + v\bar{u})$.
- M — середина $AB \iff m = \frac{a+b}{2}$.
- M на отрезке AB такова, что $AM/MB = \lambda/\mu \iff m = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot a + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot b$.
- M — точка пересечения медиан треугольника $ABC \iff m = \frac{a+b+c}{3}$.

Формулы для работы с единичной окружностью Ω.

- $Z \in \Omega \iff z\bar{z} = 1$.
- $AB \perp CD$ $(A, B, C, D \in \Omega) \iff ab + cd = 0$.
- $\boxed{Z \in AB \ (A, B \in \Omega) \iff z + ab\bar{z} = a + b.}$
- ZA касается Ω $(A \in \Omega) \iff z + a^2\bar{z} = 2a$.
- Z — точка пересечения касательных к A и B к $\Omega \iff z = \frac{2ab}{a+b}$.
- K — основание перпендикуляра из Z на AB $(A, B \in \Omega) \iff k = \frac{a+b+z-ab\bar{z}}{2}$.
- H — ортоцентр ABC $(A, B, C \in \Omega) \iff h = a + b + c$.