Серия 21. Комплексные числа, введение.

Задачи с поворотами. Для их решения полезно вводить комплексные числа, параметризующие повороты.

Поворот вектора на угол α соответствует умножению на комплексное число ε с модулем 1 и с аргументом α. Если $\alpha = 90^\circ$, то ε традиционно обозначается i и удовлетворяет соотношению $i^2 = -1$. Если $\alpha = 60^\circ$, то ε удовлетворяет равенству $\varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0$. Если $\alpha = 120^\circ$, то ε удовлетворяет равенству $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.

1. Даны два квадрата $AB_1C_1D_1$ и $AB_2C_2D_2$ с общей вершиной, причём вершины обоих квадратов перечислены в порядке обхода против часовой стрелки. Докажите, что середины отрезков B_1D_1, B_2D_2, B_1D_2, B_2D_1 служат вершинами квадрата.

2. На сторонах выпуклого четырёхугольника вовне построили квадраты. Докажите, что отрезки, соединяющие центры квадратов, построенных на противоположных сторонах, равны по длине и перпендикулярны.

3. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ нашлась такая точка O, что треугольники OAB, OCD, OEF — равносторонние. Докажите, что середины отрезков BC, DE, FA служат вершинами правильного треугольника.

4. На сторонах треугольника ABC вовне построены равносторонние треугольники. Докажите, что их центры являются вершинами равностороннего треугольника.

Далее перечислены некоторые полезные в будущем формулы.

Заведём на плоскости комплексную систему координат, её центр обозначим через O. Для каждой точки X радиус-вектор $\overrightarrow{OX}$ будем кратко обозначать соответствующей маленькой буквой x.

5. Докажите, что расстояние между точками M и N выражается формулой $|MN|^2 = (m-n)\cdot(\overline{m}-\overline{n})$.

В этом месте уместно напомнить, что $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$.

6. **(a)** Докажите, что различные точки A, B, C лежат на одной прямой, если и только если $\frac{a-b}{a-c} \in \mathbb{R}$. **(b)** Докажите, что прямая AB задаётся уравнением $(\bar{b}-\bar{a})z + (a-b)\bar{z} = a\bar{b} - b\bar{a}$.

7. Докажите, что различные точки A, B, C, D лежат на одной окружности или прямой, если и только если $\frac{a-c}{a-d}\cdot\frac{b-d}{b-c} \in \mathbb{R}$. Это выражение называется *двойным отношением* чисел a, b, c, d.

Определение. *Комплексными числами* называют векторы плоскости, на множестве которых специальным образом определены операции сложения и умножения.

Зафиксируем вектор $\vec{e}$ единичной длины. Для каждого ненулевого вектора $\vec{u}$ введём понятия модуля и аргумента. *Модулем* вектора $\vec{u}$ называется его длина; обозначается $|\vec{u}|$. *Аргументом* вектора $\vec{u}$ называется ориентированный угол $\angle(\vec{e}, \vec{u})$; обозначается $\operatorname{Arg} \vec{u}$ и определён с точностью до $360°$.

Сложение комплексных чисел есть обычное сложение векторов. *Умножение* комплексных чисел определено так: произведением векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$ называют такой вектор $\vec{w}$, что $|\vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$ и $\operatorname{Arg} \vec{w} \equiv \operatorname{Arg} \vec{u} + \operatorname{Arg} \vec{v}$.

Множество комплексных чисел обозначается символом $\mathbb{C}$ (символом $\mathbb{C}^*$ обозначается множество $\mathbb{C} \setminus \{\vec{0}\}$). Векторы, коллинеарные $\vec{e}$, естественным образом отождествляются с вещественными числами (сам $\vec{e}$ соответствует $1 \in \mathbb{R}$). Стрелки над векторами далее опускаются.

Аксиомы поля.

1. $\forall\ u, v, w \in \mathbb{C}$ выполнено $(u+v)+w = u+(v+w)$ (*ассоциативность сложения*).
2. $\exists\ \mathbf{0} \in \mathbb{C}$, такой что $\forall\ z \in \mathbb{C}$ верно $\mathbf{0} + z = z + \mathbf{0} = z$ (*нейтральный элемент по сложению*).
3. $\forall\ u \in \mathbb{C}\ \exists!\ v \in \mathbb{C}$, такой что $u + v = v + u = \mathbf{0}$ (этот v далее обозначается $-u$).
4. $\forall\ u, v \in \mathbb{C}$ выполнено $u + v = v + u$ (*коммутативность сложения*).
5. $\forall\ u, v, w \in \mathbb{C}$ выполнено $(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$ (*ассоциативность умножения*).
6. $\exists\ \mathbf{1} \in \mathbb{C}$, такой что $\forall\ z \in \mathbb{C}$ верно $\mathbf{1} \cdot z = z \cdot \mathbf{1} = z$ (*нейтральный элемент по умножению*).
7. $\forall\ u \in \mathbb{C}^*\ \exists!\ v \in \mathbb{C}^*$, такой что $u \cdot v = v \cdot u = \mathbf{1}$ (этот v далее обозначается $1/u$).
8. $\forall\ u, v \in \mathbb{C}$ выполнено $u \cdot v = v \cdot u$ (*коммутативность умножения*).
9. $\forall\ u, v, w \in \mathbb{C}$ выполнено $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$ (*дистрибутивность*).

Для работы с комплексными числами удобна операция *комплексного сопряжения*. Для каждого $z \in \mathbb{C}$ определим $\overline{z}$ так, что $|\overline{z}| = |z|$, $\operatorname{Arg} \overline{z} = -\operatorname{Arg} z$.

Алгебраические свойства комплексного сопряжения.

1. $\forall\ u, v \in \mathbb{C}$ верно $\overline{u + v} = \overline{u} + \overline{v}$.
2. $\forall\ u, v \in \mathbb{C}$ верно $\overline{u \cdot v} = \overline{u} \cdot \overline{v}$.
3. $\forall\ u \in \mathbb{C}$ выполнено $\overline{-u} = -\overline{u}$.
4. $\forall\ u \in \mathbb{C}^*$ выполнено $\overline{1/u} = 1/\overline{u}$.
5. $\forall\ z \in \mathbb{C}$ справедливо $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$.
6. $\forall\ z \in \mathbb{C}$ справедливо $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.