Серия 20. Площади.

0. Напишите пять различных формул для площади треугольника.

1. Точки K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA выпуклого четырехугольника $ABCD$. Отрезки KM и LN пересекаются в точке G. Докажите, что $S_{AKGN} + S_{CMGL} = S_{BLGK} + S_{DNGM}$.

2. На описанной окружности остроугольного треугольника ABC отмечены такие точки D и E, что $BD \perp AC$, AE — диаметр. Докажите, $S_{ABC} = S_{AECD}$.

3. Продолжение биссектрисы AD остроугольного треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке E. Из точки D на стороны AB и AC опущены перпендикуляры DP и DQ. Докажите, что $S_{ABC} = S_{APEQ}$.

4. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ отмечены середины M и N сторон AB и BC соответственно. Отрезки DM и EN пересекаются в точке X. Докажите, что $S_{XMBN} = S_{XDE}$.

5. На основании BC равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) отмечена точка K так, что радиус r вписанной окружности треугольника ABK равен радиусу вневписанной окружности треугольника ACK, касающейся отрезка CK. Докажите, что $r = h/4$, где h — длина высоты треугольника ABC из вершины B.

6. Диагонали четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность с центром O, пересекаются в точке M. Описанная окружность треугольника ABM пересекает отрезки AD и BC в точках N и K соответственно. Известно, что точка O лежит внутри треугольника AMB. Докажите, что четырехугольники $NOMD$ и $KOMC$ имеют равные площади.

7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ лучи AB и DC пересекаются в точке K. На биссектрисе угла AKD нашлась точка P такая, что прямые BP и CP делят пополам отрезки AC и BD соответственно. Докажите, что $AB = CD$.

8. К двум непересекающимся окружностям ω_1 и ω_2 проведены три общие касательные — две внешние, a и b, и одна внутренняя, c. Прямые a, b, c касаются окружности ω_1 в точках A_1, B_1, C_1 соответственно, а окружности ω_2 - в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Докажите, что отношение площадей треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равно отношению радиусов ω_1 и ω_2.