

Серия 18. Поворот

Определение. На плоскости дана точка O и зафиксировано вещественное число α . *Поворотом* с центром в точке S и углов α называется преобразование плоскости, которое каждую точку A плоскости переводит в точку A' такую, что $|OA| = |OA'|$ и $\sphericalangle(OA, OA') = \alpha$.

1. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники A_1BC , B_1AC и C_1AB . Докажите, что $AA_1 = BB_1 = CC_1$.
2. В ромбе $ABCD$ угол B равен 120° . На сторонах AB и BC взяты точки P и Q , причём $AP = BQ$. Докажите, что треугольник PQD правильный.
3. Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка X . Докажите, что прямые, проведённые через вершины B, C, D, A перпендикулярно прямым AX, BX, CX, DX соответственно, пересекаются в одной точке.
4. Точка P лежит на дуге BC описанной окружности правильного треугольника ABC . Докажите, что $PB + PC = AP$.
5. С помощью циркуля и линейки постройте равносторонний треугольник так, чтобы его вершины лежали на трёх данных параллельных прямых.
6. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K соответственно, причём $\angle BAM = \angle MAK$. Докажите, что $BM + KD = AK$.
7. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены правильные треугольники ABC_1, BCA_1, CAB_1 . На отрезке A_1B_1 во внешнюю сторону треугольника $A_1B_1C_1$ построен правильный треугольник $A_1B_1C_2$. Докажите, что C – середина отрезка C_1C_2 .
8. На сторонах AB, AC треугольника ABC внешним образом построены квадраты $ABXP$ и $ACYQ$. Докажите, что медиана AM треугольника ABC перпендикулярна PQ .
9. Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC . На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно, причём $2\angle MON = \angle AC$. Докажите, что периметр треугольника MVN не меньше стороны AC .