

Серия 17. Гомотетия, продолжение.

0. Соответственные стороны треугольников ABC и $A'B'C'$ параллельны. Докажите, что существует гомотетия либо параллельный перенос, переводящая один треугольник в другой.
1. На плоскости зафиксирована дуга AB . Случайная окружность ω касается дуги AB внешним образом в точке X и касается прямой AB в точке Y . Докажите, что все прямые XY , построенные таким образом, проходят через фиксированную точку.
2. Вписанная окружность неравностороннего треугольника ABC имеет центр I и касается его сторон BC , CA , AB в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Середины «меньших» дуг BC , CA , AB описанной окружности треугольника обозначены через A_0 , B_0 , C_0 соответственно, а её центр — через O .
 - (а) Докажите, что прямые A_0A_1 , B_0B_1 , C_0C_1 пересекаются в одной точке.
 - (б) Докажите, что ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на прямой OI .
3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 , а H — его ортоцентр. Точку H отразили относительно прямых B_1C_1 , C_1A_1 , A_1B_1 ; получили точки H_A , H_B , H_C соответственно. Докажите, что AH_A , BH_B , CH_C пересекаются в одной точке.
4. Через середину M стороны BC неравностороннего треугольника ABC проведена касательная к его вписанной окружности, отличная от BC , точка касания обозначена через Y . Докажите, что прямая A_1Y проходит через точку касания невписанной окружности с отрезком BC .
5. В углы CAB , ABC , BCA треугольника ABC вписаны равные непересекающиеся окружности ω_A , ω_B , ω_C . Окружность ω касается их всех внешним образом. Докажите, что центр ω лежит на прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC .
6. Докажите, что прямые, соединяющие центры невписанных окружностей треугольника с серединами соответствующих высот, пересекаются в одной точке.
7. Касательные к описанной окружности остроугольного треугольника ABC , восстановленные в вершинах B и C , пересекаются в точке S . Высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в точке H , а M — середина BC . Докажите, что прямые MH , B_1C_1 и SA_1 пересекаются в одной точке.