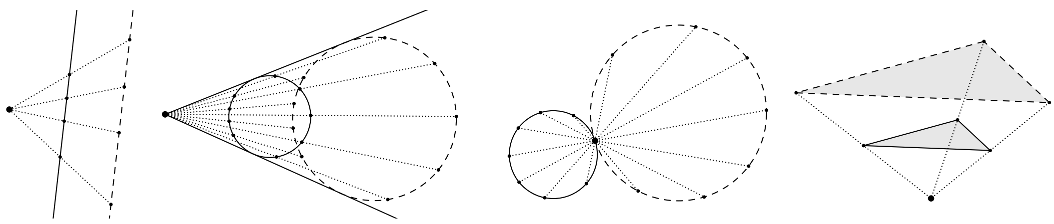
Серия 16. Гомотетия.

Определение. На плоскости дана точка S и зафиксировано вещественное число $k \neq 0$. *Гомотетией* с центром в точке S и коэффициентом k называется преобразование плоскости, которое каждую точку A плоскости переводит в точку A' такую, что $\overrightarrow{SA'} = k \cdot \overrightarrow{SA}$.



1. На основаниях BC и AD трапеции $ABCD$ вне нее построены равносторонние треугольники BCX и ADY. Докажите, что прямая XY проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

2. Внутри полосы, ограниченной параллельными прямыми a и b, нарисованы две окружности ω_a и ω_b, касающиеся друг друга в точке S. Кроме того, ω_a касается a в точке A; ω_b касается b в точке B. Докажите, что точка S лежит на отрезке AB.

3. **(a)** Окружности ω и ω_A — вписанная и вневписанная окружности треугольника ABC соответственно. Точки касания ω и ω_A с отрезком BC обозначены через K и K_A; точки L и L_A лежат на ω и ω_A и диаметрально противоположны K и K_A соответственно. Докажите, что прямые KL_A и K_AL пересекаются в точке A. **(b)** Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение про точки касания вневписанных окружностей ω_B, ω_C с прямой BC.

4. Даны угол и точка M внутри него. Постройте окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через точку M.

5. На стороне BC треугольника ABC выбрана такая точка D, что радиусы вписанных окружностей треугольников ABD и ACD равны. Докажите, что и радиусы вневписанных окружностей этих треугольников, соответствующих вершине A, тоже равны.

6. К двум непересекающимся окружностям ω_A и ω_B проведена общая касательная AB, причём $A \in \omega_A$, $B \in \omega_B$. Окружность, построенная на AB как на диаметре, повторно пересекает ω_A в точке A', ω_B в точке B'. Докажите, прямые AB' и $A'B$ пересекаются на линии центров ω_A и ω_B.

7. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность с центром I. Лучи AB, DC пересекаются в точке X. Вписанная окружность треугольника XBC касается отрезка BC в точке P; вневписанная окружность треугольника XAD касается отрезка AD в точке Q. Оказалось, что прямая PQ проходит через X. Докажите, что точка I лежит на прямой, соединяющей середины отрезков BC и AD.

8. К плоскости прибиты гвоздями окружность ω, точка A на ней и точка T внутри неё. Рассматриваются всевозможные хорды BC, проходящие через T. Докажите, что все окружности, проходящие через середины сторон треугольника ABC, касаются фиксированной окружности.