Серия 15. Радикальные оси.

1. **(a)** На прямой ℓ отмечены две различные точки A и B. Докажите, что для каждого вещественного числа λ существует единственная точка $P \in \ell$, удовлетворяющая $AP^2 - BP^2 = \lambda$.
(b) На плоскости отмечены две различные точки A и B и определено вещественное число λ. Докажите, что геометрическим местом точек X таких, что $AX^2 - BX^2 = \lambda$, служит прямая.

2. **(a)** На плоскости дана окружность ω с центром O и радиусом R и точка X. Докажите, что $\deg(X, \omega) = OX^2 - R^2$.
(b) На плоскости даны две неконцентрические окружности ω_1 и ω_2. Докажите, что геометрическим местом точек X, удовлетворяющих $\deg(X, \omega_2) = \deg(X, \omega_2)$, является прямая, перпендикулярная линии центров. Эта прямая называется *радикальной осью* окружностей ω_1 и ω_2.
(c) Докажите, что радикальные оси трех окружностей, центры которых не лежат на одной прямой, пересекаются в одной точке. Эта точка называется *радикальным центром* трех окружностей.

---

3. Докажите, что середины четырёх отрезков общих касательных к двум непересекающимся кругам лежат на одной прямой.

4. На сторонах BC, CA, AB остроугольного треугольника ABC отмечены точки A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что общие хорды окружностей, построенных на отрезках AA_1, BB_1, CC_1 как на диаметрах, пересекаются в ортоцентре треугольника.

5. На окружности ω_1 с диаметром AB взята точка C, из точки C опущен перпендикуляр CH на прямую AB. Докажите, что общая хорда окружности ω_1 и окружности ω_2 с центром C и радиусом CH делит отрезок CH пополам.

6. В угол BAC вписана окружность ω, B и C — точки касания. Точки M, N — середины отрезков AB, AC. На прямой MN отмечена произвольная точка X. Докажите, что $XA = XD$, где XD — отрезок касательной к ω.

7. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что точки пересечения пар прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 лежат на одной прямой, перпендикулярной прямой, соединяющей ортоцентр и центр описанной окружности треугольника ABC.

8. В пятиугольнике $ABCDE$ из каждой вершины опущены перпендикуляры на противоположные стороны (т. е. из A на CD, из B на DE, из C на EA, из D на AB, из E на BC). Четыре из них пересеклись в одной точке. Докажите, что все пять пересеклись в одной точке.

9. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC высоты BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H. Продолжение стороны BC (её середина обозначена за M) пересекает прямую B_1C_1 в точке N. Точки H и H' симметричны относительно BC. Докажите, что точки A, M, N, H' лежат на одной окружности.