

Серия 14. Направленные углы, продолжение.

Обозначим касательную к окружности, восстановленную в точке X этой окружности, за XX .

Как мы уже знаем, для любых четырех точек на одной окружности выполнено, что $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ADC$. В частности, $\sphericalangle AAC \equiv \sphericalangle ABC$ (теорема об угле между хордой и касательной) и $\sphericalangle AAB \equiv \sphericalangle ABV$.

1. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. (а) Биссектрисы внутренних углов при вершинах A и B , B и C , C и D , D и A пересекаются в точках K , L , M , N соответственно. Докажите, что точки K , L , M , N лежат на одной окружности. (б) Докажите, что утверждение пункта (а) остается верным, если две или все четыре биссектрисы внутренних углов четырехугольника заменить на биссектрисы внешних.
2. Дан неравнобедренный треугольник ABC . Точка D — основание биссектрисы (а) внутреннего; (б) внешнего угла при вершине A . Окружность, проходящая через точки A и D , касается прямой BC и второй раз пересекает прямые AB , AC в точках M и N соответственно. Докажите, что $MN \parallel BC$.
3. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B . Касательная в точке A к окружности ω_1 второй пересекает ω_2 в точке P ; касательная в точке B к окружности ω_2 второй пересекает ω_1 в точке Q . Прямые PB и QA вторично пересекают окружности ω_1 и ω_2 в точках R и S соответственно. Докажите, что $PRQS$ — параллелограмм.
4. Окружности ω_B , ω_C касаются описанной окружности треугольника ABC в точках B , C соответственно. Прямые AB , AC вторично пересекают ω_B , ω_C в точках D , E соответственно. Докажите, что если прямая DE касается ω_B , то она касается ω_C .
5. На окружности с центром O выбраны четыре точки A, B, C, D . Прямые AB и CD пересекаются в точке P . Окружности APD и BSP повторно пересекаются в точке Q . Докажите, что четверки точек $AQCO$ и $BQDO$ вписаны.
6. На прямой лежат точки X, Y, Z (именно в таком порядке). Треугольники XAB , YBC и ZCD — правильные, причем вершины первого и третьего ориентированы против часовой стрелки, а второго — по часовой стрелке. Докажите, что прямые AC , BD и XY пересекаются в одной точке.
7. Даны четыре точки A, B, C, D общего положения. Докажите, что окружности Эйлера треугольников ABC , ABD , ACD и BCD имеют общую точку.