Серия 13. Разнобой 3.

1. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ такой, что $\angle ABC = 90^\circ$, $AC = CD$ и $\angle BCA = \angle ACD$. Точка F — середина отрезка AD. Отрезки BF и AC пересекаются в точке L. Докажите, что $BC = CL$.

2. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках P и Q. Прямая пересекает последовательно окружности ω_1, ω_2, ω_1, ω_2 в точках A, B, C, D соответственно. Докажите, что $\angle APB = \angle DQC$.

3. Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом A. Окружность (ABD) имеет центр O, а также пересекает (вторично) прямые CB и CD в точках X и Y соответственно. Докажите, что AO — биссектриса угла XAY.

4. На продолжениях сторон AB, BC, CA, AC, BA, CB, треугольника ABC за точки A, B, C, A, B, C соответственно отмечены точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 так, что $AA_1 = AA_2 = BC$, $BB_1 = BB_2 = CA$, $CC_1 = CC_2 = AB$. Докажите, что точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 лежат на одной окружности (*окружность Конвея*).

5. Треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Некоторая окружность проходит через точки A и O и вторично пересекает прямые AB, AC в точках C', B' соответственно. Докажите, что ортоцентр треугольника $B'C'O$ лежит на прямой BC.

6. Let ABC be an acute triangle. D is a variable point on the side BC. O_1 is the circumcenter of ABD, O_2 is the circumcenter of ACD, and S is the circumcenter of AO_1O_2. Find the locus of S.

Acute — остроугольный, circumcenter — центр описанной окружности, locus — геометрическое место точек.

7. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках P и Q. Их общая касательная ℓ касается ω_1 и ω_2 в точках A и B (ℓ ближе к P, чем к Q). Точки C и D — отражения A и B относительно точки P. Окружность (PCD) вторично пересекает ω_1 и ω_2 в точках X и Y. Докажите, что радиусы окружностей (PXY) и (QXY) равны.