Серия 11. Разнобой 2.

1. На касательной к описанной окружности треугольника ABC, восстановленной в вершине A, отмечена точка P. Точки C_1 и B_1 — проекции точки P на прямые AB, AC. Докажите, что $BC \perp B_1C_1$.

2. Вписанная окружность треугольника ABC имеет центр I и касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Биссектрисы углов ABC и ACB пересекаются прямую B_1C_1 в точках X и Y. Докажите, что A_1I — биссектриса угла XA_1Y.

3. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки C_1 и B_1 соответственно, а I — центр вписанной окружности. Известно, что $BI^2 = BC_1 \cdot BC$, $CI^2 = CB_1 \cdot CB$. Докажите, что отрезок B_1C_1 проходит сквозь I.

4. В неравнобедренном треугольнике ABC центр вписанной окружности обозначен через I. Докажите, что прямые AB и AC высекают равные хорды на описанной окружности треугольника BIC.

5. Вокруг правильного треугольника APQ описан прямоугольник $ABCD$, причём точки P и Q расположены на отрезках BC, CD соответственно. Точки M и N — середины сторон AP, AQ соответственно. Докажите, что треугольники BCN и CDM — равносторонние.

6. На описанной окружности ω остроугольного неравнобедренного треугольника ABC отмечены середины A_1, B_1, C_1 дуг CAB, ABC, BCA соответственно. Докажите, что касательные к ω, восстановленные в точках B_1 и C_1, пересекаются на серединном перпендикуляре к отрезку AA_1.

7. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Прямая, перпендикулярная стороне AC и проходящая через точку A_1, пересекает прямую B_1C_1 в точке D. Докажите, что угол ADC прямой.