

Серия 10. Разнобой 1.

1. В остроугольном равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) отмечены центр O описанной окружности и центр I вписанной окружности. Точка D лежит на стороне AC . Докажите, что $AB \parallel ID$ тогда и только тогда, когда $CI \perp OD$.
2. Дана трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Окружность ω_1 касается стороны BC в точке P и продолжений сторон AB, CD за точки B и C . Окружность ω_2 касается стороны AD в точке Q и продолжений сторон AB, CD за точки A и D . Докажите, что отрезок PQ проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.
3. Дан параллелограмм $ABCD$ с тупым углом B . Прямые AD и CD второй раз пересекают окружность ω , описанную вокруг треугольника ABC , в точках E и F соответственно. Докажите, что центр описанной окружности треугольника DEF лежит на окружности ω .
4. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$). Средняя линия, параллельная AC , пересекает вписанную окружность в точке K , не лежащей на стороне BC . Докажите, что касательная в точке K к вписанной окружности, сторона AB и биссектриса угла C пересекаются в одной точке.
5. В треугольнике ABC отмечены середины M и N отрезков BC и CM соответственно. Описанная окружность треугольника ABN вторично пересекает отрезок AC в точке S . Докажите, что $\angle BAM = \angle MSN$.
6. Точки M, N, K, L — середины сторон AB, BC, CD, DA вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ соответственно. Докажите, что ортоцентры треугольников LAM, MBN, NCK, KDL служат вершинами параллелограмма.
7. Биссектрисы углов B и C треугольника ABC пересекают его описанную окружность в точках B_0 и C_0 соответственно и пересекают друг друга в точке I . Окружности ω_B и ω_C с центрами в B_0 и C_0 касаются отрезков AC и AB соответственно. Докажите, что общие внешние касательные к окружностям ω_B и ω_C проходят через точки A и I .
8. Окружности ω_1 и ω_2 касаются в точке X . На окружности ω_1 отмечены точки A и B , а на окружности ω_2 — C и D так, что AC и BD — их общие внешние касательные. Прямая CX пересекает отрезок AB в точке P , прямая AH второй раз пересекает окружность ω_2 в точке Q . Докажите, что точки D, P, Q лежат на одной прямой.
9. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC отметили ортоцентр H , центр описанной окружности O и провели высоту AD . Докажите, что образ центра описанной окружности треугольника DHO при симметрии относительно прямой OH лежит на средней линии исходного треугольника, параллельной стороне BC .