

Неразобранные «сложные» задачи из серий 1–8.

На самом деле не очень сложные. В скобках указано число решивших к 25.12.2017.

- 2.7.** (2) На стороне BC параллелограмма $ABCD$ ($\angle A < 90^\circ$) отмечена точка T так, что треугольник ATD — остроугольный. Пусть O_1 , O_2 и O_3 — центры описанных окружностей треугольников ABT , DAT и CDT соответственно. Докажите, что точка пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$ лежит на прямой AD .
- 4.5.3.** (2) Пусть X — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) с перпендикулярными диагоналями. На стороне AD отметили точку K . Описанные окружности треугольников AXK , DXK вторично пересекают отрезки AB , CD в точках M , N соответственно. Докажите, что центр описанной окружности треугольника MKN лежит на средней линии трапеции.
- 4.5.4.** (1) На плоскости отмечены точки A , B , C , P , причём A , B и C лежат на одной прямой, а P на ней не лежит. Обозначим описанные окружности треугольников BSP , CAP , ABP за ω_A , ω_B , ω_C соответственно. Пусть A_1 , B_1 , C_1 — вторые точки пересечения прямых AP , BP , CP с ω_A , ω_B , ω_C соответственно. Прямые BC_1 и CB_1 пересекаются в точке A_2 ; точки B_2 и C_2 определены аналогично. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны.
- 4.5.5.** (0) Пусть A_1 , B_1 , C_1 — середины сторон остроугольного треугольника ABC ($AB > AC$). Прямая AA_1 пересекает описанную окружность треугольника $A_1B_1C_1$ в точке S ; точка T — проекция A на A_1B_1 . Отрезки C_1T и BS пересекаются в точке X . Докажите, что вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников BC_1X и STX лежит на прямой BC .
- 6.5.3.** (0) Пусть A' , B' , C' — точки касания вневписанных окружностей треугольника ABC с отрезками BC , CA , AB соответственно. Через точки A' , B' , C' провели прямые, соответственно параллельные биссектрисам углов при вершинах A , B , C треугольника. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.
- 6.5.4.** (0) Вписанная в неравносторонний треугольник ABC окружность имеет центр I и касается его сторон BC , CA , AB в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Докажите, что отличная от A_1I общая внутренняя касательная окружностей, вписанных в четырёхугольники BA_1IC_1 и CA_1IB_1 , проходит через вершину A .
- 6.5.5.** (0) На стороне BC треугольника ABC отметили точки X и Y . Докажите, вторая общая внешняя касательная вписанных в треугольники ABX и AY окружностей пересекает вторую общую внешнюю касательную вписанных в треугольники ACX и ABY окружностей на прямой BC (либо все три прямые параллельны).
- 7.8.** (1) В треугольнике ABC проведена биссектриса AD . Вписанная окружность треугольника ABD касается сторон AB , AD , BD в точках P , U , M . Вневписанная окружность треугольника ACD касается отрезка CD в точке N и прямых AC , AD в точках Q и W . Докажите, что W лежит на прямой PM , а U лежит на прямой QN .
- 8.7.** (1) На продолжении стороны CD за точку D прямоугольника $ABCD$ отмечена точка P . Пусть M и N — середины сторон AD , BC соответственно. Прямые PM и AC пересекаются в точке Q . Докажите, что NM — биссектриса угла PNQ .