Серия 9. Степень точки относительно окружности.

Определение. На плоскости задана окружность ω и точка P. *Степенью* $\deg(P,\omega)$ точки P относительно окружности ω называется величина $\overline{PA}\cdot\overline{PB}$, где A и B — точки пересечения произвольной прямой ℓ, проходящей через точку P, с окружностью ω. Корректность определения (т. е. независимость от выбора прямой ℓ) следует из задачи **1**. В частности, для точки P вне окружности ω величина $\deg(P,\omega)$ равна квадрату длины отрезка касательной из точки P к ω (достаточно подставить вместо ℓ касательную к ω). Ясно, что точки внутри окружности обладают отрицательной степенью, точки вне — положительной.

1. На плоскости заданы окружность ω и точка P внутри или вне неё. Через P проведены две секущие AB и CD ($A, B, C, D \in \omega$). Докажите, что $\overline{PA}\cdot\overline{PB} = \overline{PC}\cdot\overline{PD}$.

2. К двум окружностям ω_1 и ω_2, пересекающимся в точках P и Q, проведена общая касательная AB ($A \in \omega_1$ и $B \in \omega_2$). Докажите, что прямая PQ делит отрезок AB пополам.

3. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке P, причём $\angle APB < 90^\circ$. Докажите, что длины отрезков касательных, проведённых из точки P к окружностям, построенным на отрезках AB и CD как на диаметрах, равны.

4. Из точки P вне окружности ω проведена касательная PA к ω ($A \in \omega$). Хорда BC окружности ω параллельна прямой PA. Прямые PB, PC вторично пересекают ω в точках X и Y. Докажите, что прямая XY делит отрезок PA пополам.

5. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Окружность ω проходит через точки A и D и пересекает отрезки AB и AC в точках P и Q соответственно. Обозначим за X и Y отражения точек P и Q относительно середин отрезков AB и AC соответственно. Докажите, что точки B, C, X, Y лежат на одной окружности.

6. Через центр I вписанной в неравнобедренный треугольник ABC окружности проведена прямая, перпендикулярная прямой AI и пересекающая прямую BC в точке K. Из точки I на прямую AK опущен перпендикуляр ID. Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности.

7. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC высоты AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке H, а O — центр его описанной окружности. Докажите, что точка, симметричная точке A относительно прямой B_1C_1, лежит на описанной окружности треугольника OHA_1.

8. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота CC_1, продолжение медианы AM пересекает описанную окружность в точке N. Точка D плоскости такова, что $ABCD$ — параллелограмм. Докажите, что A, C_1, N, D лежат на одной окружности.