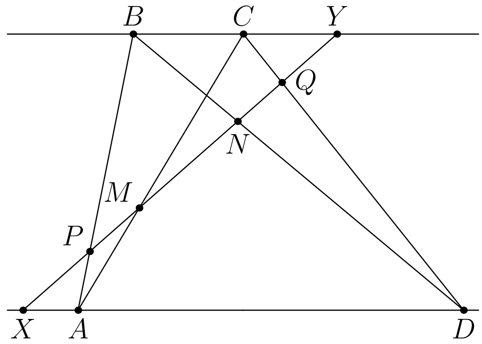
Серия 8. Отношение отрезков. Подобные треугольники и теорема Чевы.

1. На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка X. Прямая AX пересекает прямые BC, CD в точках P, Q. Докажите, что $AX^2 = XP \cdot XQ$.

2. В треугольнике ABC угол C — прямой. На катете CB как на диаметре во внешнюю сторону построена полуокружность, точка N — середина этой полуокружности. Докажите, что прямая AN делит пополам биссектрису угла C.

3. Прямая пересекает боковые стороны, диагонали и продолжения оснований трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) так, как это показано на рисунке. Докажите, что если $XP = YQ$, то $XM = YN$.



4. **Теорема Чевы.** Дан треугольник ABC и точки A_1, B_1, C_1 на прямых BC, CA и AB соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке или попарно параллельны тогда и только тогда, когда выполнено соотношение

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = 1.$$

Указание: проведите через вершину A прямую ℓ, параллельную стороне BC, и пересеките с ней прямые BB_1, CC_1. Теперь с помощью подобий все отрезки можно перебросить на прямые BC и ℓ и доказать требуемое.

5. Дан треугольник ABC. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке, если точки A_1, B_1, C_1 определены как
(a) точки касания вписанной окружности со сторонами BC, CA, AB соответственно (*точка Жергонна*);
(b) точки касания вневписанных окружностей с отрезками BC, CA, AB соответственно (*точка Нагеля*).

6. Пусть CH — высота прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$), а CL — биссектриса треугольника ACH. На прямой CH отмечена такая точка K, что $KB \parallel CL$. Докажите, что прямая KL делит отрезок AC пополам.

7. На продолжении стороны CD за точку D прямоугольника $ABCD$ отмечена точка P. Пусть M и N — середины сторон AD, BC соответственно. Прямые PM и AC пересекаются в точке Q. Докажите, что NM — биссектриса угла PNQ.