[Центр педагогического мастерства] Кушнир А., Соколов А.

[*2017–2018*] Кружок по геометрии, 8 класс *07 ноября 2017*

Серия 7. Отношение отрезков. Теорема Менелая.

1. На прямой AB отмечены точки X и Y, отличные от A и B. Докажите, что

$$X = Y \iff \frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} = \frac{\overline{AY}}{\overline{YB}}.$$

2. **Теорема Менелая.** Дан треугольник ABC и точки A_1, B_1, C_1 на прямых BC, CA и AB соответственно. Тогда точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой, если и только если выполнено соотношение

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = -1.$$

(a) Докажите, что если точки лежат на одной прямой, то соотношение выполнено.

(b) Докажите, что если соотношение выполнено, то точки лежат на одной прямой.

3. Докажите, что основания внешних биссектрис неравнобедренного треугольника лежат на одной прямой.

4. Вписанная в прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$) окружность касается его сторон AB и AC в точках C_1 и B_1. Вневписанная окружность касается продолжения сторону BC за точку C в точке A_1. Докажите, что B_1, C_1, A_1 лежат на одной прямой.

5. Смотрите первую картинку. Докажите, что $x = y$.

6. (*Теорема о трёх параллелограммах.*) На плоскости даны две тройки параллельных прямых: $a_1 \parallel a_2 \parallel a_3$ и $b_1 \parallel b_2 \parallel b_3$. Обозначим точку пересечения прямых a_i и b_j за X_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$). Докажите, что прямые $X_{11}X_{22}$, $X_{13}X_{32}$, $X_{31}X_{23}$ пересекаются в одной точке или параллельны. *Для доказательства факта пересечения трёх прямых ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 в одной точке (или параллельности) достаточно показать, что ℓ_2 делит отрезок прямой ℓ_1 в том же отношении, в каком ℓ_3 делит тот же отрезок.*

7. **Теорема Дезарга.** Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда точки пересечения пар прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 лежат на одной прямой. (Смотрите вторую картинку.)

8. Смотрите третью картинку.